DANDAO DAODAN DANDAOXUE

弹道导弹弹道学

张 毅 肖龙旭 王顺宏 编著

国防科技大学出版社

弹道导弹弹道学

DANDAO DAODAN DANDAOXUE

责任编辑：卢天琪 封面设计：火山设计

ISBN 7-81024-506-6

9 787810 245067 >

ISBN 7-81024-506-6/V·21

定价：39.80元

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

弹道导弹弹道学

张 毅 肖龙旭 王顺宏 编著

国防科技大学出版社

·长沙·

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

内容简介

本书深入地分析了弹道导弹的运动状态，建立了弹道导弹的运动方程，揭示了弹道导弹的运动规律，并对导弹设计、试验、使用中遇到的设计参数选择、飞行程序选择、弹道计算等问题进行了详细的介绍。本书适用于弹道导弹弹道学专业的本科生、研究生使用，对其他从事导弹工作的科技工作者也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

弹道导弹弹道学/张毅，肖龙旭，王顺宏编著. ——长沙：国防科技大学出版社，1999.3
ISBN 7-81024-506-6

Ⅰ. 弹道导弹弹道学
Ⅱ. 张毅，肖龙旭，王顺宏
Ⅲ. ①导弹 ②弹道学 ③飞行力学
Ⅳ. V412.1

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640 邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：卢天贶 责任校对：石少平
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
787×1092 1/16 印张：22.25 字数：514千
2005年12月第2版第2次印刷 印数 2501－3700册
*
定价：39.80元

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

序　言

飞行力学是研究飞行器运动规律的科学，是飞行器设计、试验和应用的理论基础。飞行力学与研究一般力学对象运动规律的理论力学既有区别又有联系。理论力学给出了一般力学对象作机械运动时所应遵循的普遍规律，而飞行力学则是结合飞行器的特点，在理论力学和其他学科的理论基础上，建立了自己独特的理论体系，是一门严谨而又复杂的科学。为了深入细致地描述飞行器的运动规律，在工程中常将飞行器运动分为质心运动和绕质心的姿态运动；研究其质心运动的就是弹道学，而研究姿态运动的则称为动态分析。弹道导弹弹道学是以弹道导弹为特定的力学对象研究其质心运动规律的专门学科，是飞行力学的一个分支。

弹道导弹自身的特点决定了导弹弹道学的理论和方法有别于普通弹道学。弹道导弹的弹道不仅有自由飞行段，而且有动力飞行段，这就涉及到火箭发动机推力的有关理论和计算；弹道导弹是有控飞行器，不同型号有不同的控制系统，所建立的弹道模型也就不同；弹道导弹的精度要求特别高，飞行中考虑的因素多，所以建立的计算模型也特别复杂，例如，地球扰动引力场模型；不仅如此，弹道导弹弹道学还包括飞行试验、作战使用中的精度鉴定、精度提高、射程挖潜、可靠性、机动性、火力应用等问题，其研究范围涉及到理论力学、空气动力学、控制与制导理论、计算机科学、结构力学、地球重力学以及现代数学等；所以，弹道导弹弹道学是一门研究面宽、理论深、和武器类型结合紧密的学科，是其他学科不可替代的。近几十年来，弹道导弹的发展异常迅速，不断涌现出的新理论和新方法对弹道学提出了新的更高的要求，迫切需要为弹道学增添新的内容，本书正是为满足这种要求所作努力的结果。

本书是根据导弹弹道的特点而作系统论述的，既总结了几十年来弹道学的已有成果，又有新的研究内容，可以说是弹道学方面比较完整、详细、新颖的好书。为了满足不同型号导弹在不同坐标系内建立运动方程的要求，书中对

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

坐标系及其间的转换关系进行了完整的描述，并建立了不同坐标系内的导弹运动方程。兼顾到读者阅读的完整性，书中对空气动力学、地球重力学以及火箭发动机推力计算等方面的知识也作了精心细致的论述。多年来，作者在弹道计算、再入弹道解析解、非零攻角再入以及地球扰动引力场等方面积累了多项研究成果，这些成果的编入，为导弹弹道学增添了新的内容，也是本书与其他弹道学专著的区别之处。我相信，这本书的出版将对培养导弹弹道学方面的高级技术人才和导弹弹道学的研究与发展起到有力的推动作用。

陈士橹

1998 年 7 月 13 日

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

前 言

本书是第二炮兵工程学院航空、宇航科学与技术学科重点教材，同时也是第二炮兵诸元计算与火力运用系列教材。

导弹弹道学(Missile ballistics)是研究弹道导弹运动规律的一门学科。为了保证导弹能准确命中目标，在研制、试验和实际应用过程中，均必须掌握导弹的运动规律，只有这样，在研制中才能正确地选择导弹设计参数，选择合理的弹道，在使用中才能快速准确地提供射击诸元，在试验中正确地分析故障原因，对武器作出合理的精度鉴定。所以，导弹弹道学是导弹设计、试验、使用的理论基础，是从事弹道导弹工作者必须熟练掌握的专门科学。

本书是在几十年来导弹弹道学成果的基础上，结合作者多年来给本科生、研究生授课的经验体会编写而成。在编写过程中，参阅了大量的国内外资料，并且考虑到了我国武器的发展状况，书中也包含有作者多年来的科研成果。由于使用这本书的人员较多，知识面宽窄不一，所以，编写的内容既有基础知识，又有专门、深入的研究，既有详尽的理论推导，又不累赘，特别适用于导弹弹道学专业本科生、研究生教学使用，也适用于其他有关人员参考。

全书共分十二章和五个附录，第一章介绍导弹和弹道的一般知识；第二章论述了弹道学中常用的坐标系，考虑到新型号武器的发展，加入了坐标系的四元数表示法；第三章分析了发动机推力、控制力和控制力矩；第四章主要讨论地球引力和扰动引力的计算问题，对扰动引力的论述尤其完整，是其他弹道学书中所没有的；第五章介绍了适合弹道计算的空气动力及空气动力矩，既有基本理论，又有工程算法；第六章分别建立了不同坐标系内的导弹运动方程并对各运动方程进行了满足精度的简化；第七章研究被动段弹道，除了质点运动方程以外，还建立了导弹为刚体时的运动方程；第八章弹道计算，除了介绍一般的弹道计算方法和规律外，还有作者长期进行弹道计算的实践经验；第九章介绍椭圆弹道理论；第十章探讨了考虑地球旋转和扁率时的被动段弹道计算问

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

题;第十一章主要研究导弹的再入运动,该章中有作者多年来的研究成果;第十二章讨论导弹设计参数的估算与选择,该章有一般的导弹参数设计、估算、选择理论,也有结合具体工程背景的飞行程序选择方法。附录1至附录5分别给出了四元素简介、北东坐标系、标准大气、常微分方程的计算程序以及考虑地球旋转时的误差系数。

本书在酝酿和编写过程中,中国工程院院士、西北工业大学教授、博士生导师陈士橹教授提出过宝贵意见,并为本书作序。第二炮兵科技委李昕研究员、西北工业大学曾颖超教授、国防科技大学赵汉元教授、第二炮兵第三研究所王炬高工、张绍杨高工、第二炮兵工程学院303教研室王明海教授对本书的编著给予了很大的帮助,出版中得到了第二炮兵作战部、科研部、工程学院的大力支持,在此一并表示衷心感谢。同时,对书中所引用的文献作者们表示诚挚的谢意。

由于我们水平有限,加之时间仓促,书中错误在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

1998年7月

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

目 录

第一章 绪论 …… (1)
§1.1 导弹弹道学研究对象、任务及其在作战中的作用 …… (1)
§1.2 导弹的飞行及弹道分段 …… (2)
第二章 坐标系及其变换 …… (5)
§2.1 坐标系间的方向余弦矩阵及矢量导数的关系 …… (5)
§2.2 发射坐标系和弹体坐标系 …… (9)
§2.3 惯性坐标系 …… (18)
§2.4 速度坐标系 …… (24)
§2.5 轨迹坐标系 …… (27)
§2.6 坐标系间的四元数表示法 …… (29)
第三章 推力、控制力和控制力矩 …… (31)
§3.1 发动机推力 …… (31)
§3.2 控制力和控制力矩 …… (39)
第四章 地球引力和扰动引力 …… (51)
§4.1 地球的运动及形状 …… (51)
§4.2 地球引力 …… (54)
§4.3 扰动引力的计算 …… (61)
第五章 空气动力及力矩 …… (82)
§5.1 地球大气 …… (82)
§5.2 空气动力 …… (85)
§5.3 空气动力矩 …… (95)
第六章 弹道导弹的主动段运动 …… (99)
§6.1 变质量力学基本定理 …… (99)
§6.2 主动段运动微分方程组的一般形式 …… (109)
§6.3 发射坐标系内的导弹主动段运动方程 …… (122)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§6.4 轨迹坐标系内的导弹主动段运动方程 …… (131)
§6.5 惯性坐标系内的主动段导航方程及其实时解 …… (139)
§6.6 主动段运动参数分析 …… (144)
第七章 弹道导弹的被动段运动 …… (148)
§7.1 导弹为质点时的运动微分方程 …… (148)
§7.2 导弹为刚体时的运动微分方程 …… (149)
§7.3 被动段弹道特性分析 …… (157)
第八章 弹道计算 …… (161)
§8.1 标准弹道和干扰弹道 …… (161)
§8.2 弹道微分方程组的解算方法 …… (165)
§8.3 弹道计算 …… (171)
第九章 弹道导弹的自由段运动 …… (173)
§9.1 运动微分方程及其积分 …… (173)
§9.2 弹道方程的讨论 …… (175)
§9.3 导弹被动段射程与主动段终点参数的关系 …… (183)
§9.4 被动段飞行时间的计算 …… (189)
§9.5 误差系数 …… (199)
第十章 考虑地球旋转及其扁率时导弹被动段弹道计算 …… (212)
§10.1 考虑地球旋转时的被动段弹道计算 …… (212)
§10.2 考虑地球旋转时的误差系数 …… (219)
§10.3 考虑地球扁率时的被动段弹道计算 …… (223)
第十一章 弹道导弹的再入段运动 …… (243)
§11.1 再入段运动微分方程的建立 …… (243)
§11.2 零冲角再入时的运动参数近似计算 …… (244)
§11.3 非零冲角再入时的弹道近似解 …… (252)
§11.4 再入机动弹道方程和最优制导律 …… (255)
第十二章 导弹主要参数的估算 …… (271)
§12.1 主动段终点速度和坐标的估算 …… (271)
§12.2 全射程的估算 …… (281)
§12.3 导弹设计参数的选择 …… (282)
§12.4 多级火箭主要参数的估算 …… (285)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§12.5 飞行程序选择 …… (293)

附录 1 四元数简介 …… (306)
附录 2 北东坐标系 …… (318)
附录 3 标准大气(1976 美国) …… (325)
附录 4 常微分方程组的求解算法程序 …… (334)
附录 5 考虑地球旋转时的误差系数计算公式 …… (341)
参考文献 …… (346)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第一章 绪 论

§1.1 导弹弹道学研究对象、任务及其在作战中的作用

飞行力学是应用力学的一个新分支，是研究可操纵飞行器在给定外力、外力矩和控制系统工作条件下的基本运动的一门科学。所谓可以操纵飞行器是指在空中运动的、具有自身改变其飞行轨道能力的一种机械装置，如飞机、导弹、火箭、卫星和宇宙飞船等航空航天飞行器。飞行力学根据研究对象的不同，又分为飞机飞行力学、导弹飞行力学和航天动力学等。研究导弹(或火箭)在空中的基本运动规律的科学称为导弹飞行力学。

飞行力学与研究一般力学对象运动规律的理论力学既有区别又有密切的联系。理论力学是研究一般力学对象作机械运动时所遵循的普遍规律和描述其运动规律的数学方程。而导弹飞行力学则是以导弹(或火箭)为特定的研究对象，应用理论力学的基本规律和知识深入研究其运动规律，并应用这些规律解决导弹设计、试验和作战应用中的有关各种实际问题的一门科学。

导弹作为在空间运动的刚体，因受力和力矩的作用，有六个自由度的运动，因此需要有六个动力学微分方程和六个运动学微分方程来描述它。随着导弹射程的不断增加和射击精度的不断提高，考虑影响其运动的因素越来越多，因而描述其运动的微分方程组也越来越复杂。在工程中，为简化研究的问题，常将导弹运动分为质心的运动和绕质心的运动两部分，相应地导弹飞行力学也就分为导弹弹道学和动态分析两部分内容。导弹弹道学是将导弹当成理想操纵下的一个可操纵质点，研究其质心在飞行中所描绘出的运动轨迹的科学。这条轨迹称为基准弹道，并根据此基准弹道可进一步确定导弹的主要性能指标。如果在研究中考虑的影响因素和采用的数据比较准确，那么基准弹道就更接近于导弹的实际飞行弹道。导弹动态分析则是将导弹作为可操纵的质点系，在受有各种干扰作用下的运动状态。

导弹弹道学的主要任务在于：研究作用在导弹上的各种力和力矩，根据不同类型导弹的特点建立完成不同任务的运动微分方程组，并研究其计算方法；根据给定的战术技术指标，研究与导弹结构参数、飞行程序、动力装置、控制系统和战斗部系统各参数间的关系，以及确定这些参数的最佳值；研究各种干扰因素对弹道性能的影响；解算弹道以确定飞行试验原始数据和分析试验结果；解决战斗使用中诸如根据给定的发射点和目标点位置坐标，计算射击诸元等问题。

在导弹弹道学研究中，首先在一定的理论基础上，根据给定条件建立描述导弹运动规律的运动方程，其次分析研究各种影响因素，进而作出较符合客观实际的基本假设和运动方程的简化，最后在理论研究的前提下，进行数字仿真、飞行试验和实际使用，检验理论的

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

正确性，并根据飞行试验和实际使用结果，不断使这门工程技术科学的理论逐步完善、提高和发展。

研究和掌握导弹运动规律是从事飞行力学工作者的一项十分重要的任务。在导弹设计过程中，只有经过弹道分析掌握导弹运动规律，才能正确地选择结构参数、选择飞行弹道和进行弹道计算，评定导弹的基本性能参数，并为导弹飞行试验提供需要的理论弹道参数数据；在导弹设计完成后的飞行试验过程中，只有应用弹道理论分析试验数据，研究弹道参数变化规律，才能正确地评定飞行试验结果，确定各分系统的性能指标的优劣，为导弹定型提供可靠的依据；在导弹交付作战部队使用过程中，也只有掌握了导弹弹道理论和导弹的飞行规律，才能正确地制定精度高、使用方便的诸元计算方案，判断和排除使用中出现的技术故障，确保导弹准确地瞄准和命中目标，才能根据定型后状态参数进行射程和精度挖潜，充分发挥武器系统效能，提高战斗力，才能为首长的作战指挥技术决策和制定作战方案提供理论依据，才能正确地确定发射阵地控制区和火力控制范围，进行落点预报和建立导弹弹道走廊安全区。

§1.2 导弹的飞行及弹道分段

1.2.1 飞行概述

按火箭发动机类型分类，弹道导弹分为液体弹道导弹和固体弹道导弹；如果按导弹级数多少来分类，弹道导弹又分为单级弹道导弹、两级弹道导弹和多级弹道导弹。

这里以由二级液体火箭发动机推动的弹道式导弹为例，来说明该类导弹的飞行过程及其飞行弹道。弹道式导弹的飞行过程一般由垂直起飞、程序转弯、发动机关机、级间分离、头体分离、自由段飞行、再入段飞行和击中目标几部分组成(图 1－1)。当垂直竖立在发射台上的导弹各子系统完成测试、飞行控制参数装订、瞄准和接到点火命令后，按下点火按钮，一级发动机点火工作，推力逐渐增加。当推力达到导弹起飞重量时，导弹离开发射台缓缓垂直起飞，此时记作导弹飞行的零秒，弹上各种控制仪器同时进入正常工作状态。当导弹飞行 1 秒左右时，发动机推力达到额定值。而当垂直上升累计时间约几秒时，导弹在控制系统作用下逐渐向目标方向转动，弹道也开始向目标方向弯曲，开始程序段飞行。随着时间的增长，导弹的飞行速度、飞行高度及飞行距离逐渐增大，而速度方向与发射点处地平面的夹角 θ 却逐渐减小。当导弹的飞行速度及其质心空间位置等参数达到一级预令关机的要求时，控制系统就实时地发出一级发动机关机指令，此时燃料输送系统中的启动活门逐渐关闭，推进剂秒流量急速减少，推力迅速下降。预令后的不长时间内，控制系统发出关机主令，此时启动活门完全关闭，推进剂秒流量递减为零。一级关机预令后零点几秒时，二级主发动机启动，而关机预令后不久，则一、二级解锁，并依靠二级主发动机喷出的高速燃气流所具有的动能实现一、二级的热分离。分离后的一级弹体惯性飞行一段时间后陨落，二级则在其发动机推力和控制系统的作用下沿着预定的弹道继续飞行。随着时间的增长，导弹飞行速度、飞行高度及飞行距离逐渐增加。当导弹的飞行速度和其质心位置等参数满足二级预令关机要求时，控制系统发出二级主发动机关机指令，推

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

进剂秒流量迅速减少，推力下降。二级预令后约十几秒，当导弹满足给定的射击精度时，控制系统发出二级发动机关机主令，游动发动机关机，而主发动机已在其预令关机后的几秒内自动关闭。在主发动机关机后的一段时间内，因游动发动机仍处于正常工作状态，所以推进剂秒流量和发动机推力基本保持不变。二级关机主令后，再经过几秒，头体解锁，并借助于安装在二级弹体上的固体反推火箭实现头体的冷分离。分离后的二级弹体在飞行一段时间后陨落，而分离后的弹头，若无任何控制时，则将依靠分离时所获得的能量按预定的自由段弹道惯性飞向目标；若有姿态控制时，则在其飞行过程中的初始时间内，将以一定的角速度绕其质心作翻转运动，如果携带有突防物，同时将其释放。但当其重返大气层时，装在上面的姿态控制火箭工作，并按姿态控制程序规定的动作和飞行姿态稳定地进入大气层，直至飞向目标。

在弹道学中，常将导弹头体分离点称为主动段关机点，而其所对应的弹道参数（速度、速度倾角、位置）则称为关机点弹道参数。实践表明，关机点弹道参数对导弹的被动段飞行至关重要。从后面的讨论中将会看到，在理想的情况下，导弹能否达到预定的射程以及弹头能否准确地命中目标，完全取决于关机点的弹道参数。

1.2.1 弹道分段

导弹质心在空间的运动轨迹称为弹道。两级弹道式导弹的弹道如图 1－1 所示。根据导弹飞行概况中所描述的飞行特点，整个弹道不尽相同，需进行分段研究。因此，弹道分段的目的就在于应用不同的数学模型描述各段弹道的特点，以便求得导弹运动规律的全貌。

根据弹道式导弹从发射点到目标点的运动过程中的受力情况，可将其弹道分为几段。首先，根据导弹在飞行中发动机和控制系统工作与否，可将其弹道分为动力飞行段（简称主动段）和无动力飞行段（简称被动段）两部分。其次，在被动段则又根据弹头所受空气动力的大小而分为自由飞行段（简称自由段）和再入大气层飞行段（简称再入段）两部分。

下面分别叙述导弹在其各段弹道上的飞行特点。

1. 主动段（*ok*）

这是从导弹离开发射台到头体分离为止的一段弹道。在这段弹道上，由于发动机和控制系统一直工作，因而称之为主动段。在该段的飞行特点是：作用在弹上的力和力矩有地球引力、空气动力、发动机推力、控制力以及它们相对导弹质心所产生的相应力矩。推力主要用来克服地球引力和空气阻力并使导弹作加速运动；而控制力则主要产生控制力矩，以便在控制系统作用下使导弹按给定的飞行程序飞行，确保导弹按预定的弹道稳定地飞向目标。通常，导弹在主动段的飞行时间并不长，一般约在几十至几百秒的范围内。

2. 被动段（*kc*）

从头体分离到弹头落地的一段弹道称为被动段弹道。在无控制的情况下，弹头依靠在主动段终点所获得的能量作惯性飞行。虽然在此段不对弹头进行控制，但作用在它上的力是可以相当精确地计量的，因而基本上可较准确地掌握弹头的运动，以保证其在一定的射击精度要求下命中目标。若在弹头上安装姿态控制系统，即设有末制导时，则导弹的射击精度可大大提高。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

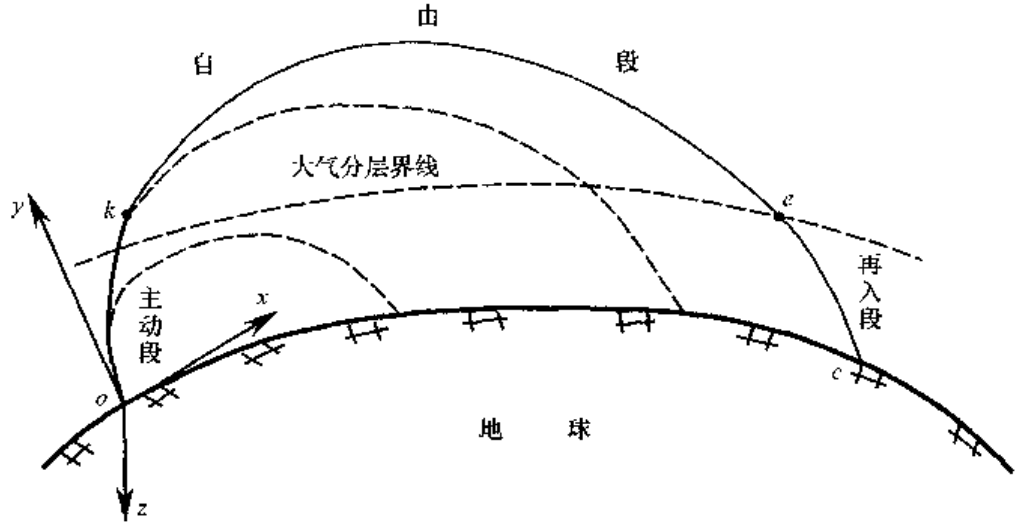


图 1-1

在被动段，根据弹头在运动中所受的空气动力大小又可分为不计大气影响的自由飞行段和计及大气影响的再入段两部分。由于空气密度随高度的增加而连续地减小，因而要想截然地划出一条有、无空气的大气层边界是不可能的。但从大气对导弹飞行参数影响显著与否出发，又需根据实际情况划定一条大气边界线或大气边界层。一般来说，对于中近程弹道导弹通常以主动段关机点高度作为划分自由段和再入段的标准高度，大约 50～70km；而对远程导弹而言，则通常以高度 80～100km 作为大气层的计算高度。

(1)自由段(*ke*)：由于主动段终点高度较高，而大气密度又随着高度的增加而迅速降低，因而可认为在自由段上弹头是在相当稀薄的大气中飞行。这时作用在弹头上的空气动力远远小于其它作用力(地球引力和地转惯性力等)，这样空气动力完全可以略去，即认为弹头是在真空中飞行，故自由段也称真空段。我们将从后面的讨论中知道，自由段弹道为椭圆弹道的一部分，且其弹道约占全部弹道的 80%～90%以上。

(2)再入段(*ec*)：再入段就是指弹头重新进入稠密大气层的一段弹道。当弹头高速进入大气层时，由于大气对弹头的作用不仅使弹头承受强烈的气动加热，出现高温，也将使弹头受到巨大的气动阻力，从而使其速度迅速减小。因此，再入段弹道与其自由段弹道有着完全不同的特点。

弹头在自由段飞行时，由于不再受到空气动力矩和控制力矩的作用，因而不会保持其分离时的运动姿态，而是以固定的角速度绕其质心自由地进行翻转运动。直到弹头重新进入大气层时，由于大气阻滞作用的逐渐增大，加之头部的气动静稳定特性或姿态控制的作用，才使其任意翻转受到制动，并以一定的速度稳定地冲向目标。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第二章　坐标系及其变换

众所周知，自然界中的一切物体都在不停地运动着。运动是绝对的，静止则是相对的。对于物体的永远运动这一客观事实，尽管相对于不同的坐标系（即参考系），其运动形式及其运动规律的描述不同，但绝对不会因选择的参考系不同而改变其固有的运动特性。这正如一定长度的物体，它绝不会因选用度量尺度的不同而改变其客观长度一样。上述特性也完全适用于导弹这一特定运动物体。然而合理而恰当地选择参考系统却会使描述物体运动规律的数学模型大为简化，否则将使问题复杂化，甚至陷入无法处理的困境。因此，正确定义和恰当地选择参考系统是研究导弹运动规律的一项重要工作。

在研究物体和导弹运动特性和规律时，还必须将不同坐标系所描述的同一物理量统一到同一个坐标系中来进行，而两坐标系间的关系可用它们间的方向余弦矩阵表示，也可用四元数方法表示。本章首先讨论任意两个坐标系间物理量的方向余弦矩阵转换关系，然后再介绍四元数转换表示方法。

在弹道学中，用到的坐标系比较多，但限于篇幅，只介绍发射坐标系、弹体坐标系、惯性坐标系、速度坐标系和轨迹坐标系等几种常用的坐标系以及它们间的关系。

§2.1　坐标系间的方向余弦矩阵及矢量导数的关系

2.1.1　坐标系间的方向余弦矩阵

若 $ox_py_pz_p$ 和 $ox_qy_qz_q$ 为两个坐标原点重合，而坐标轴方向不重合的右手直角坐标系，$\boldsymbol{P}$ 为 x_q、y_q、z_q 坐标轴单位矢量变换成 x_p、y_p、z_p 坐标轴单位矢量的转换矩阵，则有

$$\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_q \tag{2-1.1}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_p = [\,x_p^0,\ y_p^0,\ z_p^0\,]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E}_q = [\,x_q^0,\ y_q^0,\ z_q^0\,]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{2-1.2}$$

为列矩阵。

将(2-1.1)式等号两边同时点乘以 $\boldsymbol{E}_q$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{E}_q^{\mathrm{T}}$，因 $\boldsymbol{E}_q \cdot \boldsymbol{E}_q^{\mathrm{T}} = I$（单位矩阵），故有

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_p \cdot \boldsymbol{E}_q^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_p^0 \cdot x_q^0 & x_p^0 \cdot y_q^0 & x_p^0 \cdot z_q^0 \\ y_p^0 \cdot x_q^0 & y_p^0 \cdot y_q^0 & y_p^0 \cdot z_q^0 \\ z_p^0 \cdot x_q^0 & z_p^0 \cdot y_q^0 & z_p^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} \tag{2-1.3}$$

上式可简记为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\boldsymbol{P}=[a_{ij}] \qquad (i,j=1,2,3) \tag{2-1.4}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的矩阵元素，如

$$a_{11}=\boldsymbol{x}_p^0\cdot\boldsymbol{x}_q^0=\cos(x_p,x_q)$$
$$a_{12}=\boldsymbol{x}_p^0\cdot\boldsymbol{y}_q^0=\cos(x_p,y_q)$$
$$a_{13}=\boldsymbol{x}_p^0\cdot\boldsymbol{z}_q^0=\cos(x_p,z_q)$$

等等。

因为 $\boldsymbol{P}$ 矩阵中的九个元素是由两坐标系坐标轴间夹角的余弦值所组成，故称该矩阵为方向余弦矩阵。由于 $ox_py_pz_p$ 和 $ox_qy_qz_q$ 两坐标系均为右手直角正交坐标系，因而它们的方向余弦矩阵为正交矩阵。根据正交矩阵的“逆矩阵等于其转置矩阵”的特性，所以有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$$

对于具有正交特性的方向余弦矩阵中的九元素，只有三个元素是独立的。这是因为九元素满足每行(或列)自身点乘积等于 1，行与行(或列与列)之间互相点乘积等于零，共有六个关系式之缘故。

两坐标系间方向余弦矩阵的一个最简单形式，就是这两坐标系的三个坐标轴中，有一相对应的坐标轴平行，例如 z_p 与 z_q 平行，而 y_p 与 y_q 夹角为 ξ，则此时对应的方向余弦矩阵式为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\cos\xi & \sin\xi & 0\\ -\sin\xi & \cos\xi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_3[\xi] \tag{2-1.5}$$

式中 $\boldsymbol{M}_3[\xi]$ 表示这两坐标系第三个坐标轴(即 z 轴)平行，而其它相应坐标轴夹角为 ξ 的方向余弦矩阵。

采用相同的方法可获得这两坐标系的第二个坐标轴和第一个坐标轴平行，而其他相应坐标轴夹角分别为 η 和 ζ 的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{M}_2[\eta]$ 和 $\boldsymbol{M}_1[\zeta]$。不难理解，可将此类方向余弦记为一般形式 $\boldsymbol{M}_i[\theta]\ (i=1,2,3)$，$i$ 表示第 i 轴平行，θ 为其他相应两坐标轴间的夹角。

2.1.3 坐标系转换矩阵的欧拉角表示法

利用上述方法，可以获得任意两坐标系间的方向余弦矩阵关系式。

设有 $ox_py_pz_p$ 和 $ox_qy_qz_q$ 为任意两个坐标原点和坐标轴均不重合的右手空间直角坐标系，并且认为 $ox_py_pz_p$ 坐标系是由 $ox_qy_qz_q$ 坐标系经过三次旋转后获得的。为了求得坐标系间的方向余弦矩阵关系式，先将 $ox_qy_qz_q$ 坐标系平移到 $ox_py_pz_p$ 坐标系并使两坐标系之原点重合。

1. 第一次旋转

将平移后的 $ox_qy_qz_q$ 坐标系绕 oz_q 轴逆时针(从 oz_q 轴正方向看)以角速度 ξ 旋转 ξ 角得坐标系 $ox_1y_1z_q$。为今后叙述方便，我们将用符号“$ox_qy_qz_q \xrightarrow{(z_q\ 逆\ \xi)} ox_1y_1z_q$”表示，如图 2-1 所示。这样，如果空间任一点在坐标系 $ox_qy_qz_q$ 和坐标系 $ox_1y_1z_q$ 各轴上的投影分别为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(x_q, y_q, z_q)及(x_1, y_1, z_q)，那么由图2－1不难写出该点在这两标系中坐标间的方向余弦为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_q \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_3(\xi) \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \tag{2-1.6}$$

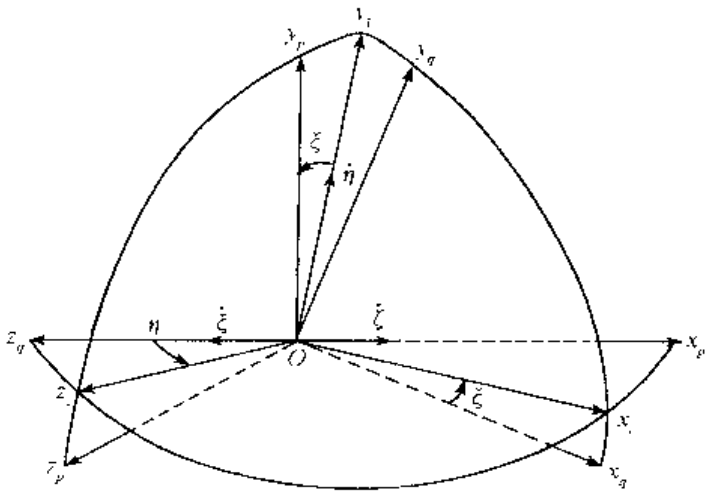


图2－1

其中，方向余弦矩阵 $\boldsymbol{M}_3(\xi)$为

$$\boldsymbol{M}_3(\xi) = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-1.7}$$

若令

$$[x_q] = \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad 及 \quad [x_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_q \end{bmatrix}$$

则得

$$[x_1] = \boldsymbol{M}_3(\xi)[x_q] \tag{2-1.8}$$

2. 第二次旋转

将坐标系 $ox_1y_1z_q$ 绕 oy_1 轴逆时针以角速度 $\dot{\eta}$ 旋转 η 角得新坐标系 $ox_py_1z_1$（即 $ox_1y_1z_q \xrightarrow{(y_1\text{逆}\ \eta)} ox_py_1z_1$）。此时若任一点在 $ox_py_1z_1$ 坐标系中的坐标为(x_p, y_1, z_1)，则由图2－1可得上述两坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_2(\eta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_q \end{bmatrix} \tag{2-1.9}$$

或

$$[x_p] = \boldsymbol{M}_2(\eta)[x_1] \tag{2-1.10}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\boldsymbol{M}_2[\eta]=\begin{bmatrix}\cos\eta & 0 & -\sin\eta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\eta & 0 & \cos\eta\end{bmatrix} \tag{2-1.11}$$

3. 第三次旋转

将坐标系 $ox_py_1z_1$ 绕 ox_p 轴逆时针以角速度 ζ 旋转 ζ 角，使 oy_1 轴与 oy_p 重合，oz_1 轴与 oz_p 轴重合，即可得坐标系 $ox_py_pz_p$，(即 $ox_py_1z_1 \xrightarrow{(x_p\text{ 逆 }\zeta)} ox_py_pz_p$)。这样，若任一点在坐标系 $ox_py_pz_p$ 中的坐标为(x_p, y_p, z_p)，则由图 2-1 可得两坐标系间的方向余弦矩阵关系式为

$$\begin{bmatrix}x_p\\ y_p\\ z_p\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_1(\zeta)\begin{bmatrix}x_p\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} \tag{2-1.12}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_1[\zeta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\zeta & \sin\zeta\\ 0 & -\sin\zeta & \cos\zeta\end{bmatrix} \tag{2-1.13}$$

根据初等变换矩阵关系，很容易得出 $ox_py_pz_p$ 坐标系与 $ox_qy_qz_q$ 坐标系间的方向余弦矩阵关系

$$[x_p]=\boldsymbol{M}[x_q] \tag{2-1.14}$$

其中

$$\begin{cases}[x_p]=\begin{bmatrix}x_p\\ y_p\\ z_p\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1(\zeta)\cdot\boldsymbol{M}_2(\eta)\cdot\boldsymbol{M}_3(\xi)\end{cases} \tag{2-1.15}$$

因方向余弦转换矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为正交矩阵，其转置矩阵等于逆矩阵，即

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}^{-1}$$

故(2-1.14)式又可表示成

$$[x_q]=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}[x_p] \tag{2-1.16}$$

式中转置矩阵为

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}_3(\xi)\cdot\boldsymbol{M}_2(\eta)\cdot\boldsymbol{M}_1(\zeta) \tag{2-1.17}$$

即

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\cos\xi\cos\eta & -\sin\xi\cos\zeta+\cos\xi\sin\eta\sin\zeta & \cos\xi\sin\eta\cos\zeta+\sin\xi\sin\zeta\\ \sin\xi\cos\eta & \sin\xi\sin\eta\sin\zeta+\cos\xi\cos\zeta & \sin\xi\sin\eta\cos\zeta-\cos\xi\sin\zeta\\ -\sin\eta & \cos\eta\sin\zeta & \cos\eta\cos\zeta\end{bmatrix} \tag{2-1.18}$$

上式即为用欧拉角 ξ、η、ζ 表示的两坐标系间方向余弦矩阵。由于任意两坐标系经过旋转至重合的三个角度与旋转次序有关，即根据转动次序的排列数可知共有六种次序，即有六种不同的欧拉角，这样(2-1.18)式中的每一个元素的表达式也就有所不同，但每个元素的值都是一样的。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

2.1.4 坐标系间矢量导数的关系

设有坐标系原点重合的两个右手直角坐标系，其中 $oxyz$ 坐标系相对另一坐标系 P 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动。x^0、y^0、z^0 为转动坐标系的单位矢量，则任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = a_x x^0 + a_y y^0 + a_z z^0 \tag{2-1.19}$$

将上式微分，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}x^0 + \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}y^0 + \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}z^0 + a_x\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} + a_y\frac{\mathrm{d}y^0}{\mathrm{d}t} + a_z\frac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}t} \tag{2-1.20}$$

定义

$$\frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}x^0 + \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}y^0 + \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}z^0 \tag{2-1.21}$$

而 $\frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t}$ 是处于转动坐标系 $oxyz$ 内的观察者所见到的矢量 $\boldsymbol{A}$ 随时间的变化率，并将其称为在 $oxyz$ 坐标系中的“局部导数”（或称为相对导数）。对于该观察者而言，只有 $\boldsymbol{A}$ 的分量变化，而单位矢量 x^0、y^0、z^0 是固定不动的。但对处于 P 坐标系内的观察者来说，$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t}$ 是具有单位矢量 x^0 的点，由于转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 而造成的速度，由理论力学可知，该点速度为

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times x^0 \tag{2-1.22}$$

同理

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y^0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times y^0 \\ \dfrac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times z^0 \end{cases} \tag{2-1.23}$$

将上述关系式代(2-1.20)式即得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{2-1.24}$$

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 称为“绝对导数”，相当于站在惯性坐标系中的观察者所看到的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的变化率。

由于在实际推导中并未用到惯性坐标系的假设，因此对于任意两个有相对转动的坐标系，关系式(2-1.24)是普遍成立的。

§2.2 发射坐标系和弹体坐标系

2.2.1 发射坐标系[g]($oxyz$)

我们知道，地地弹道式导弹的发射点和目标点均在地球上，观察和讨论其运动时也是相对地球而言的。为此，首先定义固连于地球，且随之转动的发射坐标系，并将它作为讨论导弹运动规律的基本参考系。

我们定义的发射坐标系，其坐标原点取于导弹发射点 o；oy 轴取过发射点的铅垂线，

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

向上为正，其延长线过地球赤道平面交地轴于 o'_e 点，它与赤道平面的夹角 B_T，称为天文纬度，而 oy 轴所在的天文子午面与起始天文子午面（过英国格林威治天文台的天文子午面）之间的二面角 λ_T，称为发射点天文经度；ox 轴与 oy 轴垂直，且指向瞄准方向，它与发射点天文子午面正北方向构成的夹角 A_T，称为天文瞄准方位角；oz 轴与 ox、oy 轴构成右手直角坐标系。在弹道学理论中，常将 xoy 平面称为射击平面，简称射面（图 2－2）。

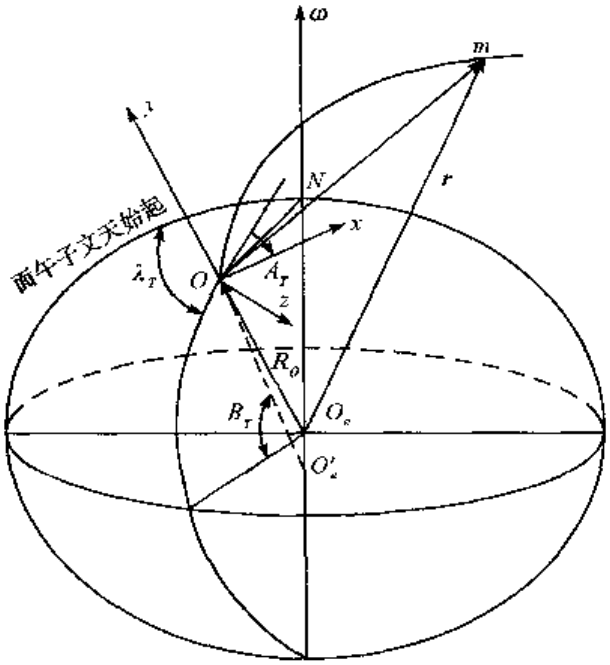


图 2－2

依据定义，显然这一坐标系为动坐标系。只有不计地球旋转时，它才能成为惯性坐标系或称初始发射坐标系。

需要强调指出，由于真实地球近似为一椭球的缘故，因此发射坐标系 oy 轴与发射点处的法线并不重合，只有在忽略垂线偏差时，oy 轴才沿该点的法线方向。此外，oy 轴的延长线也并不通过地心 o_e，这是由于地球质量相对于包含发射点地心矢径在内的平面分布不对称和因地球旋转产生的牵连惯性力所引起的。

有了发射坐标系后，就可较方便地用来描述运动中的导弹质心任一时刻相对地球的位置和速度，同时也可用来描述地球对导弹的吸引力问题。

假设导弹某时刻位于空间 m 点，那么该点位置既可以用 m 点在发射坐标系中的坐标 (x,y,z) 来表示，也可用 m 点对地心的矢径 $\boldsymbol{r}$ 来确定。事实上，由图 2－2 可得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0 + o\boldsymbol{m}$$

或

$$\boldsymbol{r} = (R_{ox} + x)\boldsymbol{x}^0 + (R_{oy} + y)\boldsymbol{y}^0 + (R_{oz} + z)\boldsymbol{z}^0 \qquad (2-2.1)$$

式中，$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$、$\boldsymbol{z}^0$ 为发射坐标系各轴的单位矢量；R_{ox}、R_{oy}、R_{oz} 为发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 在发射坐标系各轴上的投影。

矢量 $\boldsymbol{r}$ 大小及其方向余弦可表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} r=\sqrt{(R_{ox}+x)^2+(R_{oy}+y)^2+(R_{oz}+z)^2} \\ \cos(r,x)=\dfrac{R_{ox}+x}{r} \\ \cos(r,y)=\dfrac{R_{oy}+y}{r} \\ \cos(r,z)=\dfrac{R_{oy}+z}{r} \end{cases} \tag{2-2.2}$$

在确定了飞行导弹质心相对发射坐标系的矢径后，那么描述其质心相对该坐标系的速度也就容易确定了。因此发射坐标系在研究导弹相对地面运动的规律时，是一个较为方便的参考系。

这里顺便提一下地面坐标系的概念。地面坐标系也固连于地球上，其坐标系原点仍取发射点；而 oy 轴则沿发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 方向；ox 轴垂直于 oy 轴，且指向瞄准方向；oz 轴与 ox、oy 轴构成右手直角坐标系。这样看来，一般情况下，发射坐标系与地面坐标系并不重合，只有在忽略地球扁率和不计地球旋转时两坐标系才重合。在研究中近程弹道式导弹的运动中，常常采用地面坐标系。

2.2.2 弹体坐标系[b]($o_z x_1 y_1 z_1$)

为描述飞行导弹相对地球的运动姿态，我们引进一个固连于弹体且随导弹一起运动的直角坐标系 $o_z x_1 y_1 z_1$，该坐标系称为弹体坐标系。

坐标系原点取在导弹质心 o_z 上；$o_z x_1$ 轴与弹体纵对称轴一致，指向弹头方向；$o_z y_1$ 轴垂直于 $o_z x_1$ 轴，且位于导弹纵对称面(即导弹发射瞬时与射击平面重合的平面)内，指向上方；$o_z z_1$ 轴与 $o_z x_1$、$o_z y_1$ 轴构成右手直角坐标系(图 2-3)。

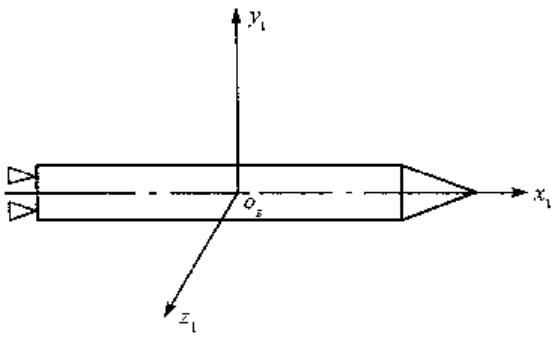


图 2-3

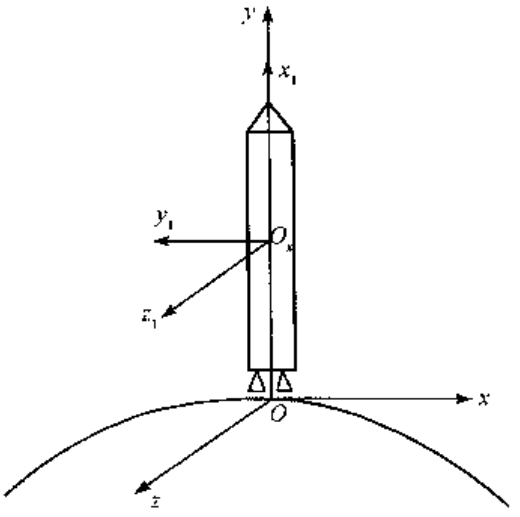


图 2-4

弹体坐标系的引入，不但方便地描述飞行导弹相对地球的运动姿态，而且由于发动机的推力方向和控制力的方向分别与弹体坐标系的 x_1、y_1 及 z_1 轴方向一致，因而用这个坐

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

标系来描述推力和控制力也是十分简便的。

由于弹道式导弹是垂直发射的，因而在发射时，必须对其进行发射定向工作。一般情况下，发射瞬时导弹纵对称面在射击平面内，因此，导弹纵轴 o_2x_1 必然与发射坐标系的 oy 轴重合；而弹体坐标系 o_2y_1 轴则应指向射击瞄准方向的反方向，至于 o_2z_1，则自然与 oz 轴同向(图 2－4)。

2.2.3 弹体坐标系与发射坐标系的关系

1. 坐标系间关系

导弹飞行过程中，如果已知其质心相对发射坐标系之坐标(x, y, z)，那么导弹相对发射点的位置也就认为是确定的了。然而此时导弹的运动是抬头还是低头、是偏左还是偏右，我们并不知道。换言之，发射坐标系所能够确定的仅仅是导弹质心任一时刻相对地球的位置，而无法确定飞行导弹相对地球的运动姿态。只有将固连于地球的发射坐标系和固连于导弹的弹体坐标系联合使用，才能既可描述飞行导弹任一飞行瞬时相对地球的位置，也能确定其相对地球的飞行姿态。为此，我们建立弹体坐标系与发射坐标系间的关系。

在建立两坐标系间关系时，我们认为弹体坐标系是由在发射瞬时与发射坐标系相重合的辅助发射坐标系平移(这种平移并不影响发射坐标系相对弹体坐标系的方位姿态，而仅仅是发射坐标系的原点改变而已)到导弹质心后，经过三次连续旋转得到，即 $o_2xyz \xrightarrow{(z\text{逆}\varphi)} o_2x'y'z' \xrightarrow{(y'\text{逆}\psi)} o_2x''y''z'' \xrightarrow{(x''\text{逆}\gamma)} o_2x_1y_1z_1$，相应两坐标系间的方向余弦矩阵分别为 $\boldsymbol{A}(\varphi)$、$\boldsymbol{A}(\psi)$、$\boldsymbol{A}(\gamma)$。很显然，平移后的辅助发射坐标系与弹体坐标系各轴间的三个欧拉角分别为 φ、ψ、γ(图 2－5)。

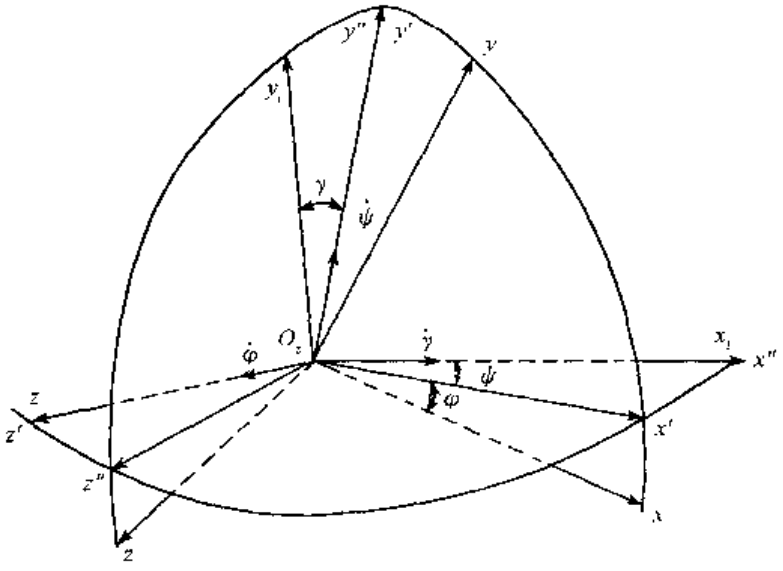


图 2－5

由(2－1.15)式即可得发射坐标系与弹体坐标系间的方向余弦矩阵式为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}[x_1]=\boldsymbol{A}(\gamma)\cdot\boldsymbol{A}(\psi)\cdot\boldsymbol{A}(\varphi)[x]=A_b^g[x]\\ \boldsymbol{A}_b^g=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\gamma\sin\psi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\gamma\cos\varphi & \cos\psi\sin\gamma\\ \cos\gamma\sin\psi\cos\varphi+\sin\gamma\sin\varphi & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma & \cos\gamma\cos\psi\end{bmatrix}\end{cases}\quad(2-2.3)$$

由于两坐标系均为正交坐标系，因而它们间的坐标方向余弦矩阵系正交矩阵。根据正交矩阵的“逆矩阵等于其转置矩阵”的特性，由(2－2.3)式不难得出弹体坐标系与发射坐标系间的矩阵式

$$[x]=\boldsymbol{A}_g^b[x_1]\quad(2-2.4)$$

式中 $\boldsymbol{A}_b^g$ 为 $\boldsymbol{A}_g^b$ 的转置矩阵，即

$$\boldsymbol{A}_g^b=[\boldsymbol{A}_b^g]^{\mathrm{T}}\quad(2-2.5)$$

$$\boldsymbol{A}_g^b=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma-\sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma\\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma\\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma\end{bmatrix}\quad(2-2.6)$$

2. 姿态角的定义及其几何意义

从上面不难看出，弹体坐标系与发射坐标系间的坐标关系完全由 φ、ψ 及 γ 三个欧拉角所联系。也就是说，导弹相对发射坐标系的飞行姿态完全由 φ、ψ 及 γ 来确定。在弹道学中，我们将角度 φ、ψ 及 γ 分别称为导弹俯仰角、偏航角及滚动角，统称为导弹相对地球的飞行姿态角。

由于导弹姿态角在研究导弹相对地面的飞行中关系重大，因此我们有必要对它们的含义及几何意义进行讨论。

(1)俯仰角 φ：它是指导弹纵对称轴 o_2x_1 在 xo_2y 平面内的投影与 o_2x 轴之间的夹角，且规定：当纵轴 o_2x_1 在射面 xo_2y 内的投影在 o_2x 轴的上方时，定义为正，反之为负。由此可知，俯仰角 φ 实质上是描述飞行导弹相对地面下俯(即弹体低头)或上仰(即弹体抬头)程度的一个物理量。

(2)偏航角 ψ：它是指导弹纵轴 o_2x_1 与 xo_2y 平面间的夹角，且规定：当 o_2x_1 轴在射面的左边(顺 o_2x 轴正方向看去)时，它定义为正，反之为负。毫无疑问，偏航角 ψ 实质上是描述飞行导弹偏离射面程度的一个物理量。

(3)滚动角 γ：它是指导弹横轴 o_2z_1 与 x_1o_2z 平面间的夹角。且当横轴 o_2z_1 在 x_1o_2z 平面之下时，它定义为正，反之为负。由此可见，滚动角 γ 实质上是描述弹体绕其纵轴 o_2x_1 滚转程度的一个物理量。

对于弹道式导弹来说，俯仰角 φ 要比偏航角 ψ 和滚动角 γ 大得多，前者约在 15°～90° 的范围内变化，而后者的变化范围仅几度而已。这意味着，为能确保飞行导弹始终不偏离射面以及控制仪器的正常工作，我们既不希望其飞行偏离射面，也不要求它有任何滚动，否则不仅会造成大的横向偏差，甚至还会影响控制仪器的正常工作。附带说明一点，导弹相对地面的飞行姿态的变化无非有俯仰、偏航和滚动这三种运动。所以固连于弹体上的弹体坐标系定能以不同方式相对发射坐标系进行俯仰、偏航和滚动后而与其重合。上面所介绍的旋转方法，只是采用了先转动俯仰角 φ，再转动偏航角 ψ，最后转动滚动角 γ 的

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

旋转顺序而使两坐标系重合的。但事实上，旋转顺序完全可以任意选择，毫无疑问，不同的旋转顺序所得到的三个欧拉角的定义不同，因而两坐标系间的方向余弦关系式（或方向余弦表）也各异。但对导弹飞行姿态的最终描述效果都是完全一样的。

为了使用方便，有时又将(2－2.6)式表为方向余弦表 2.1 的形式。

表 2.1　发射坐标系与弹体坐标系间的关系表

	x_1	y_1	z_1
x	$\cos\varphi\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\psi\sin\gamma-\sin\varphi\cos\gamma$	$\cos\varphi\sin\psi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma$
y	$\sin\varphi\cos\psi$	$\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma$	$\sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma$
z	$-\sin\psi$	$\cos\psi\sin\gamma$	$\cos\psi\cos\gamma$

由前面可知，一般情况下，由于角度 ψ 及 γ 相对角度 φ 来说是一小量，因而可近似地认为 $\sin\gamma\approx\gamma$，$\sin\psi\approx\psi$，$\cos\psi=\cos\gamma\approx 1$。这样，在略去 ψ 及 γ 之乘积项以后，表 2.1 即可简化为表 2.2。

表 2.2　发射坐标系与弹体坐标系间的关系简化表

	x_1	y_1	z_1
x	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\psi\cos\varphi+\gamma\sin\varphi$
y	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\psi\sin\varphi-\gamma\cos\varphi$
z	$-\psi$	γ	1

尽管发射坐标系经过三次旋转后与弹体坐标系重合，但也不要忘记，这纯属于为研究问题方便而人为分开的。事实上，这三次转动是同时进行的，因而导弹相对地面旋转角速度的合矢量 $\boldsymbol{\omega}_1$ 应为

$$\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}+\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{2-2.7}$$

根据图 2－5，可得 $\boldsymbol{\omega}_1$ 在弹体坐标系各轴上的投影为

$$\begin{cases}\omega_{x1}=-\dot{\varphi}\sin\psi+\dot{\gamma}\\ \omega_{y1}=\dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma+\dot{\psi}\cos\gamma\\ \omega_{z1}=\dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma-\dot{\psi}\sin\gamma\end{cases} \tag{2-2.8}$$

2.2.4　发射坐标系与地心大地直角坐标系间的关系

在弹道学中，地面上的发射点、目标点以及飞行时导弹质心的空间位置常常是用地心大地直角坐标系来确定的，而描述导弹质心运动的微分方程式一般又是相对于发射坐标系建立的。因此，需要讨论发射坐标系与地心大地直角坐标系间的关系问题。

地心大地直角坐标系[s]($o_e x_s y_s z_s$)是这样定义的：坐标原点位于地球中心 o_e；$o_e z_s$ 轴沿地球自转轴指向北极；$o_e x_s$ 轴为起始天文子午面与地球赤道平面之交线，且指向外方向；$o_e y_s$ 轴指向东方，且与 $o_e z_s$、$o_e x_s$ 轴构成右手直角坐标系(图 2－6)。

根据发射坐标系和地心大地直角坐标系的定义可知，两坐标系间的坐标方向余弦关

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

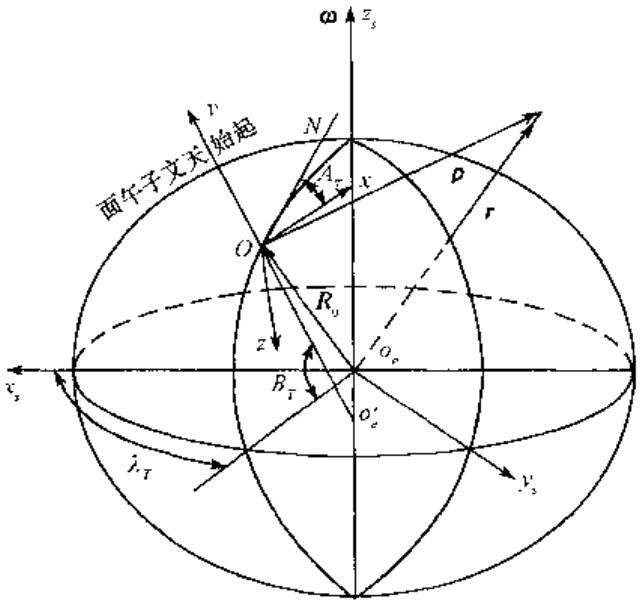


图 2-6

系可由天文纬度 B_T、天文经度 λ_T 和天文瞄准方位角 A_T 来确定。为导出坐标系[g]与[s]间的坐标方向余弦关系，设 $\boldsymbol{\rho}$ 为飞行导弹质心 m 相对发射点 o 的矢径，$\boldsymbol{R}_0$ 为发射点 o 相对地心 o_e 的矢径，则导弹质心 m 相对地心 o_e 的矢径为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{\rho} \tag{2-2.9}$$

此矢量式在地心大地直角坐标系的投影式即为

$$[x_s] = [x_0] + [\rho_s] \tag{2-2.10}$$

式中

$[x_s] = [x_s, y_s, z_s]^T$，为 $\boldsymbol{r}$ 在地心大地直角坐标系各轴上投影之列矩阵；

$[x_0] = [x_0, y_0, z_0]^T$，为 $\boldsymbol{R}_0$ 在地心大地直角坐标系各轴上投影之列矩阵；

$[\rho_s] = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]^T$，为 $\boldsymbol{\rho}$ 在地心大地直角坐标系各轴上投影之列矩阵。

与分析弹体坐标系[b]和发射坐标系[g]间方向余弦关系类似，首先将与地心大地直角坐标系重合的辅助坐标系平移至发射点，然后连续旋转三次，并与发射坐标系重合，从而导出两坐标系间的方向余弦关系式。

(1)第一次旋转：$ox_sy_sz_s \xrightarrow{(z_s\text{ 顺 }90^\circ-\lambda_T)} ox'_sy'_sz'_s$。两坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$[\rho_s] = \boldsymbol{D}(90^\circ - \lambda_T)[x'_s] \tag{2-2.11}$$

其中

$[x'_s] = [x'_s, y'_s, z'_s]^T$ 为 $\boldsymbol{\rho}$ 在坐标系 $ox'_sy'_sz'_s$ 各轴上投影的列矩阵。

(2)第二次旋转：$ox'_sy'_sz'_s \xrightarrow{(x'_s\text{ 逆 }B_T)} ox''_sy''_sz''_s$。两坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$[x'_s] = \boldsymbol{D}(B_T)[x''_s] \tag{2-2.12}$$

式中

$[x''_s] = [x''_s, y''_s, z''_s]^T$ 为 $\boldsymbol{\rho}$ 在坐标系 $ox''_sy''_sz''_s$ 各轴上投影之列矩阵。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(3)第三次旋转：$ox''_sy''_sz''_s \xrightarrow{(y''_s\ 顺\ 90^\circ + A_T)} oxyz$。两坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$[x''_s] = \boldsymbol{D}(90^\circ + A_T)[x] \tag{2-2.13}$$

式中

$[x] = [x, y, z]^T$ 为 $\boldsymbol{\rho}$ 在发射坐标系 $oxyz$ 各轴上投影之列矩阵。

根据(2-2.11)~(2-2.13)式，不难导出以下发射坐标系与平移于发射点的辅助地心大地直角坐标系间的坐标变换式：

$$[\rho_x] = \boldsymbol{D}_s^g \cdot [x] \tag{2-2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_s^g &= \boldsymbol{D}(90^\circ - \lambda_T) \cdot \boldsymbol{D}(B_T) \cdot \boldsymbol{D}(90^\circ + A_T) \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-2.15}$$

$\boldsymbol{D}_s^g$ 矩阵各元素为

$$\begin{cases} d_{11} = -\sin\lambda_T \sin A_T - \sin B_T \cos A_T \cos\lambda_T \\ d_{12} = \cos\lambda_T \cos B_T \\ d_{13} = -\sin\lambda_T \cos A_T + \cos\lambda_T \sin B_T \sin A_T \\ d_{21} = \sin A_T \cos\lambda_T - \sin\lambda_T \sin B_T \cos A_T \\ d_{22} = \sin\lambda_T \cos B_T \\ d_{23} = \cos\lambda_T \cos A_T + \sin\lambda_T \sin B_T \sin A_T \\ d_{31} = \cos B_T \cos A_T \\ d_{32} = \sin B_T \\ d_{33} = -\sin A_T \cos B_T \end{cases} \tag{2-2.16}$$

将(2-2.14)代入(2-2.10)式，便得地心大地直角坐标系[s]与发射坐标系[g]间的坐标变换式为

$$[x_s] = \boldsymbol{D}_s^g[x] + [x_0] \tag{2-2.17}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{2-2.18}$$

很明显，如果发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 在发射坐标系中之坐标为(R_{ox}、R_{oy}、R_{oz})，那么它与(x_0, y_0, z_0)间的关系则为

$$[R_{ox}] = [\boldsymbol{D}_s^g]^T[x_0] = \boldsymbol{D}_g^s[x_0] \tag{2-2.19}$$

即

$$\begin{bmatrix} R_{ox} \\ R_{oy} \\ R_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{2-2.20}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

这里附带说明一下关于地心坐标系的概念。由于地面上(或空间)任一点的位置也可用地心 o_e 到该点的距离 r、地心纬度 φ_s 和地心经度 λ_s 来确定,因而用 (r,φ_s,λ_s) 来描述地面或空间位置的极坐标系,称为地心坐标系(图 2-7)。

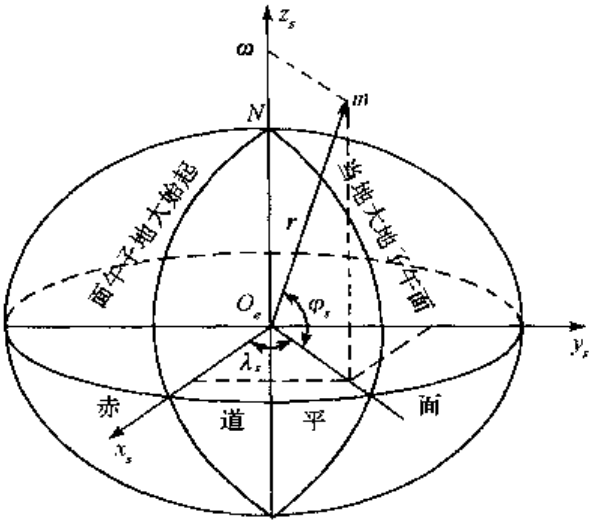


图 2-7

地心坐标系参量 (r,φ_s,λ_s) 与地心大地直角坐标系参量 (x_s,y_s,z_s) 间的关系,根据图 2-7 可得

$$\begin{cases} x_s = r\cos\varphi_s\cos\lambda_s \\ y_s = r\cos\varphi_s\sin\lambda_s \\ z_s = r\sin\varphi_s \end{cases} \tag{2-2.21}$$

或

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2} \\ \varphi_s = \sin^{-1}\dfrac{z_s}{r} \\ \lambda_s = \dfrac{y_s}{|y_s|}\left(\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}\right) \end{cases} \tag{2-2.22}$$

式中地心纬度 φ_s 为空间任一点 m 的地心矢径 $\boldsymbol{r}$ 与地球赤道平面间的夹角,且当 m 点在赤道以北时,称为北纬,φ_s 定义为正;反之,称为南纬,定义为负。地心经度 λ_s 为当地大地子午面(过 m 点的子午面)与起始大地子午面(过英国格林威治天文台包含法线在内的子午面)间的二面角,且当 m 点在起始大地子午面以东时,称为东经,λ_s 定义为正;反之,称为西经,定义为负。

类似地,当发射点 O 至地心的距离及其地心纬度和地心经度分别为 R_0、φ_{s0} 及 λ_{s0} 时,则该点的地心坐标系参数为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \\ \varphi_{sc} = \sin^{-1}\dfrac{z_0}{R_0} \\ \lambda_{sc} = \dfrac{y_0}{|y_0|}\left(\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right) \end{cases} \tag{2-2.23}$$

式中 x_0、y_0、z_0 为发射点相对地心大地直角坐标系之坐标。

§2.3 惯性坐标系

前已述及，研究导弹运动的规律一般是以发射坐标系作为基本参考系进行的，而导弹飞行加速度和姿态角，则是以固连于惯性平台上的惯性坐标系为基准进行测量的，因此建立惯性坐标系与发射坐标系和弹体坐标系之间的关系，就显得非常必要了。

2.3.1 惯性坐标系[a]($ox^a y^a z^a$)

惯性坐标系是以惯性空间为参考而定义的坐标系。该坐标系在导弹起飞瞬时是与发射坐标系[g]相重合的。导弹起飞以后，固连于地球上的发射坐标系随地球旋转而转动，而惯性坐标系之坐标轴却始终指向惯性空间的固定方向，即与固连于惯性空间的陀螺平台上的各坐标轴保持一致。因此，惯性坐标系也称初始发射坐标系或平台惯性坐标系(图2-8)，它的定义与发射坐标系的定义完全相同。

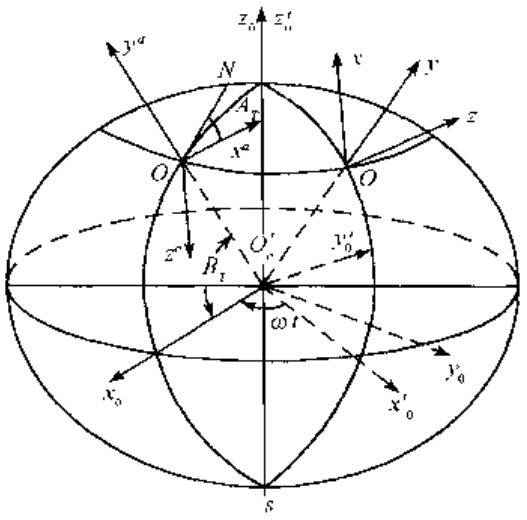


图2-8

2.3.2 惯性坐标系与发射坐标系间的关系

在图2-8中，$ox^a y^a z^a$ 为惯性坐标系，其 oy^a 轴之延长线交地轴于 o'_e；B_T 和 A_T 分别为发射点天文纬度和天文瞄准方位角；$oxyz$ 为发射坐标系，发射瞬时它与惯性坐标系重合，以后随地球旋转而转动，在导弹起飞后的 t 时刻，发射坐标系相对惯性坐标系的旋转角度为 ωt，其中 ω 为地球自转角速度。

为讨论方便，引入不随地球旋转的空间惯性直角坐标系 $o'_e x_0 y_0 z_0$ 和随同地球旋转的空间直角坐标系 $o'_e x'_0 y'_0 z'_0$。空间惯性直角坐标系定义如下：坐标原点取于 o'_e；$o'_e z_0$ 轴指向地球自转轴方向；$o'_e x_0$ 轴为导弹起飞瞬时发射点子午面与过 o'_e 点的平行于赤道面的平面之交线，指向外；$o'_e y_0$ 轴与 $o'_e x_0$、$o'_e z_0$ 轴构成右手直角坐标系(图2-8)。导弹起飞瞬时，空间直角坐标系与空间惯性直角坐标系重合，以后它随地球一起转动，因此空间直角坐标系的定义与空间惯性直角坐标系的定义基本相同。导弹起飞后的 t 时刻，坐标轴 $o'_e x_0$ 与 $o'_e x'_0$ 和 $o'_e y_0$ 与 $o'_e y'_0$ 之间相差 ωt 角度。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为导出惯性坐标系[a]与发射坐标系[g]间的方向余弦关系，根据图2－8，我们总可以将平移于 o'_e 的惯性坐标系经过旋转便可与空间惯性直角坐标系重合，而且两坐标系间的关系恰好与平移于 o'_e 点的发射坐标系和当 $\lambda_T=0$ 时的地心大地直角坐标系间的关系相同。因而根据(2－2.14)、(2－2.15)式，不难写出空间惯性直角坐标系与惯性坐标系间的方向余弦矩阵式

$$[x_0]=\boldsymbol{D}'[x^a] \tag{2-3.1}$$

其中

$$\boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{bmatrix} \tag{2-3.2}$$

矩阵各元素分别为

$$\begin{cases} d'_{11}=-\sin B_T\cos A_T \\ d'_{12}=\cos B_T \\ d'_{13}=\sin B_T\sin A_T \\ d'_{21}=\sin A_T \\ d'_{22}=0 \\ d'_{23}=\cos A_T \\ d'_{31}=\cos B_T\cos A_T \\ d'_{32}=\sin B_T \\ d'_{33}=-\sin A_T\cos B_T \end{cases} \tag{2-3.3}$$

惯性坐标系与空间惯性直角坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$[x^a]=\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}[x_0] \tag{2-3.4}$$

$\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}'$ 的转置矩阵。

同样道理，空间直角坐标系与发射坐标系间的变换矩阵式为

$$[x'_0]=\boldsymbol{D}'[x] \tag{2-3.5}$$

而空间惯性直角坐标系与空间直角坐标系间的坐标变换式为

$$[x_0]=\boldsymbol{D}'(\omega t)[x'_0] \tag{2-3.6}$$

$$\boldsymbol{D}'(\omega t)=\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-3.7}$$

根据(2－3.4)～(2－3.6)式，则得惯性坐标系与发射坐标系间的方向余弦矩阵式

$$[x^a]=\boldsymbol{A}_a^g[x] \tag{2-3.8}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_a^g &= \boldsymbol{D}'^{-1}\cdot\boldsymbol{D}'(\omega t)\cdot\boldsymbol{D}' \\ &= \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{21} & d'_{31} \\ d'_{12} & d'_{22} & d'_{32} \\ d'_{13} & d'_{23} & d'_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \tag{3-3.9}$$

两坐标系间的坐标变换关系如表 2.3 所示。

表 2.3 惯性坐标系与发射坐标系间关系表

	x	y	z
x^a	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}
y^a	a'_{21}	a'_{22}	a'_{23}
z^a	a'_{31}	a'_{32}	a'_{33}

对于矩阵元素 a'_{11}，即有

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos^2 A_T \cos^2 B_T + \sin^2 B_T \cos^2 A_T \cos\omega t + \sin B_T \cos A_T \sin A_T \sin\omega t \\ &\quad - \sin A_T \sin B_T \cos A_T \sin\omega t + \sin^2 A_T \cos\omega t \\ &= \cos^2 A_T \cos^2 B_T + \sin^2 B_T \cos^2 A_T \cos\omega t + \sin^2 A_T \cos\omega t \end{aligned} \tag{2-3.10}$$

由于地球自转角速度 ω 比较小，导弹主动段飞行时间也不很长，因而常将上式进行如下简化：

将 $\cos\omega t$ 及 $\sin\omega t$ 展成台劳级数

$$\begin{cases} \cos\omega t = 1 - \dfrac{1}{2!}(\omega t)^2 + \dfrac{1}{4!}(\omega t)^4 - \cdots \\ \sin\omega t = \omega t - \dfrac{1}{3!}(\omega t)^3 + \cdots \end{cases}$$

略去其三阶以上各高阶项，得

$$\begin{cases} \cos\omega t \approx 1 - \dfrac{1}{2}\omega^2 t^2 \\ \sin\omega t \approx \omega t \end{cases}$$

因此

$$a'_{11} = 1 - \frac{1}{2} t^2 (\omega^2 - \omega^2 \cos^2 B_T \cos^2 A_T) \tag{2-3.11}$$

又因地球自转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在发射坐标系各轴上的投影(图 2-9)为

$$\begin{cases} \omega_x = \omega \cos B_T \cos A_T \\ \omega_y = \omega \sin B_T \\ \omega_z = -\omega \cos B_T \sin A_T \end{cases} \tag{2-3.12}$$

则 a'_{11} 又可表成

$$a'_{11} = 1 - \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_x^2) t^2 \tag{2-3.13}$$

用同样的方法，可求得矩阵 A_a^g 各元素

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

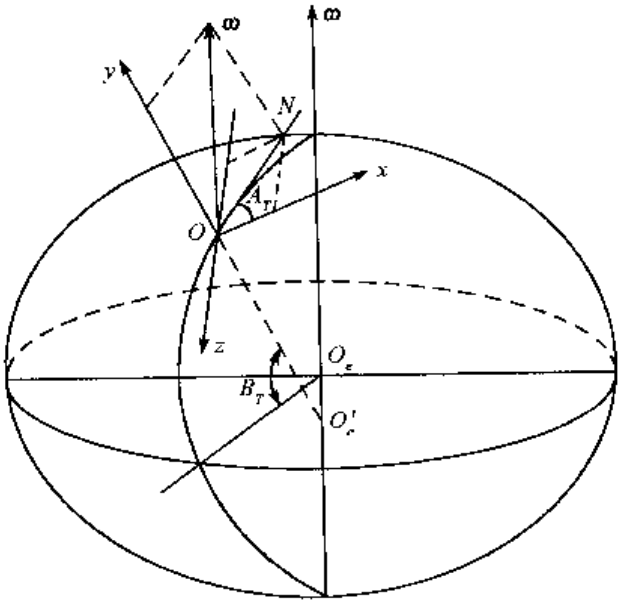


图 2-9

$$
\begin{cases}
a'_{11} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_x^2)t^2 \\
a'_{12} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_y t^2 - \omega_z t \\
a'_{13} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_z t^2 + \omega_y t \\
a'_{21} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_y t^2 + \omega_z t \\
a'_{22} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_y^2)t^2 \\
a'_{23} = \dfrac{1}{2}\omega_y\omega_z t^2 - \omega_x t \\
a'_{31} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_z t^2 - \omega_y t \\
a'_{32} = \dfrac{1}{2}\omega_y\omega_z t^2 + \omega_x t \\
a'_{33} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_z^2)t^2
\end{cases}
\tag{2-3.14}
$$

如果只考虑 $\cos\omega t$ 及 $\sin\omega t$ 台劳展式中的一阶项，则矩阵各元素可进一步简化成表 2.4 所示形式。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

表 2.4 惯性坐标系与发射坐标系间关系简化表

	x	y	z
x^a	1	$-\omega_z t$	$\omega_y t$
y^a	$\omega_z t$	1	$-\omega_x t$
z^a	$-\omega_y t$	$\omega_x t$	1

2.3.3 惯性坐标系与弹体坐标系间的关系

前面定义并讨论了导弹相对于发射坐标系的三个姿态角 φ、ψ 及 γ 和发射坐标系与弹体坐标系间的关系。但是弹上控制系统的测量元件在测量导弹飞行姿态时并不是以发射坐标系为基准，而是以惯性坐标系为基准，因此，由弹上测量元件测出的姿态角是相对于惯性坐标系的姿态角。类似于 φ、ψ 及 γ 的定义，我们把弹上测量元件测出的姿态角用 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$ 及 $\tilde{\gamma}$ 表示，且分别称为相对惯性坐标系的绝对俯仰角、偏航角和滚动角。

由于惯性坐标系与弹体坐标系间的关系和发射坐标系与弹体坐标系间的关系相似，因而只要将发射坐标系与弹体坐标系间的方向余弦关系表 2.1 中之 φ、ψ 及 γ 换为 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$ 及 $\tilde{\gamma}$，即可得惯性坐标系与弹体坐标系间的方向余弦关系表 2.5。

在控制系统作用下，由于导弹相对惯性坐标系之偏航角 $\tilde{\psi}$ 和滚动角 $\tilde{\gamma}$ 均比较小，可近似认为 $\sin\tilde{\psi}\approx\tilde{\psi}$、$\sin\tilde{\gamma}\approx\tilde{\gamma}$、$\cos\tilde{\psi}=\cos\tilde{\gamma}\approx 1$，因此，当略去 $\tilde{\psi}$ 与 $\tilde{\gamma}$ 乘积项后，表 2.5 便可简化为表 2.6。

表 2.5 惯性坐标系与弹体坐标系间的关系表

	x_1	y_1	z_1
x^a	$\cos\tilde{\varphi}\cos\tilde{\psi}$	$\cos\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}\sin\tilde{\gamma}-\sin\tilde{\varphi}\cos\tilde{\gamma}$	$\cos\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}\cos\tilde{\gamma}+\sin\tilde{\varphi}\sin\tilde{\gamma}$
y^a	$\sin\tilde{\varphi}\cos\tilde{\psi}$	$\sin\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}\sin\tilde{\gamma}+\cos\tilde{\varphi}\cos\tilde{\gamma}$	$\sin\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}\cos\tilde{\gamma}-\cos\tilde{\varphi}\sin\tilde{\gamma}$
z^a	$-\sin\tilde{\psi}$	$\cos\tilde{\psi}\sin\tilde{\gamma}$	$\cos\tilde{\psi}\cos\tilde{\gamma}$

表 2.6 惯性坐标系与弹性坐标系间关系简化表

	x_1	y_1	z_1
x^a	$\cos\tilde{\varphi}$	$-\sin\tilde{\varphi}$	$\tilde{\psi}\cos\tilde{\varphi}+\tilde{\gamma}\sin\tilde{\varphi}$
y^a	$\sin\tilde{\varphi}$	$\cos\tilde{\varphi}$	$\tilde{\psi}\sin\tilde{\varphi}-\tilde{\gamma}\cos\tilde{\varphi}$
z^a	$-\tilde{\psi}$	$\tilde{\gamma}$	1

2.3.4 姿态角 φ、ψ、γ 与 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$、$\tilde{\gamma}$ 的关系

惯性坐标系与弹体坐标系的坐标变换关系表 2.5(或表 2.6)是直接比拟于发射坐标系与弹体坐标系表 2.1 得到的。实际上也可由惯性坐标系与发射坐标系间关系简化表

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

2.4 和发射坐标系与弹体坐标间关系简化表 2.2，间接地导出以下惯性坐标系与弹体坐标系间的坐标变换关系式：

$$[x^a] = \boldsymbol{D}_a^b[x_1] \tag{2-3.15}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_a^b = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{bmatrix} \tag{2-3.16}$$

矩阵各元素为：

$$\begin{cases} D'_{11} = \cos\varphi - \omega_z t\sin\varphi \\ D'_{12} = -\sin\varphi - \omega_z t\cos\varphi \\ D'_{13} = \psi\cos\varphi + \gamma\sin\varphi + \omega_y t \\ D'_{21} = \sin\varphi + \omega_z t\cos\varphi \\ D'_{22} = \cos\varphi - \omega_z t\sin\varphi \\ D'_{23} = \psi\sin\varphi - \gamma\cos\varphi - \omega_x t \\ D'_{31} = -\psi - \omega_y t\cos\varphi + \omega_x t\sin\varphi \\ D'_{32} = \gamma + \omega_y t\sin\varphi + \omega_x t\cos\varphi \\ D'_{33} = 1 \end{cases} \tag{2-3.17}$$

将 D'_{11}、D'_{31} 及 D'_{32} 分别与表 2.6 中之对应项进行比较，则得

$$\begin{cases} \tilde{\psi} = \psi + \omega_y t\cos\varphi - \omega_z t\sin\varphi \\ \cos\tilde{\varphi} = \cos\varphi - \omega_z t\sin\varphi \\ \bar{\gamma} = \gamma + \omega_y t\sin\varphi + \omega_x t\cos\varphi \end{cases}$$

由于地球自转角速度分量 ω_z 甚小，弹道式导弹在主动段的飞行时间也不太长，因而角度 $\omega_z t$ 一般很小(约 0.42 ~ 1.25 度)，可近似为 $\omega_z t \approx \sin\omega_z t$、$\cos\omega_z t \approx 1$。于是

$$\cos\tilde{\varphi} = \cos\varphi\cos\omega_z t - \sin\varphi\sin\omega_z t = \cos(\omega_z t + \varphi)$$

即

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \omega_z t$$

这样，弹体坐标系相对惯性坐标系的姿态角 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$ 及 $\bar{\gamma}$ 与弹体坐标系相对发射坐标系的姿态角 φ、ψ 及 γ 的关系即可表成

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi + \omega_z t \\ \tilde{\psi} = \psi + \omega_y t\cos\varphi - \omega_z t\sin\varphi \\ \bar{\gamma} = \gamma + \omega_y t\sin\varphi + \omega_z t\cos\varphi \end{cases} \tag{2-3.18}$$

需要说明一点，在推导角 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$、$\bar{\gamma}$ 与 φ、ψ、γ 间的关系时，只要将任一个 D'_{ij} 与表 2.6 中的对应项进行比较，均能得到与(2-3.18)式具有相同效果的关系式。然而在具体实施时，总是以推导过程简便和最终表达式简单为原则的。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§2.4 速度坐标系

导弹在飞行中，速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 一般是一空间矢量。为确定该矢量在空间的方位及研究作用于导弹上的空气动力，需要引入以速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 为参考的速度坐标系。

2.4.1 速度坐标系[c]($o_z x_c y_c z_c$)

坐标系原点取在导弹质心 o_z；$o_z x_c$ 轴与导弹速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 一致；$o_z y_c$ 轴在导弹纵对称平面内，垂直于 $o_z x_c$ 轴，指向上方；$o_z z_c$ 与 $o_z x_c o_z y_c$ 轴构成右手直角坐标系(图 2-10)。

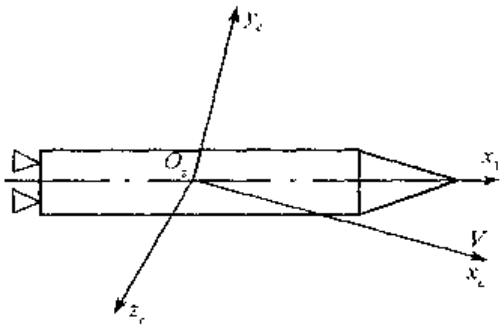


图 2-10

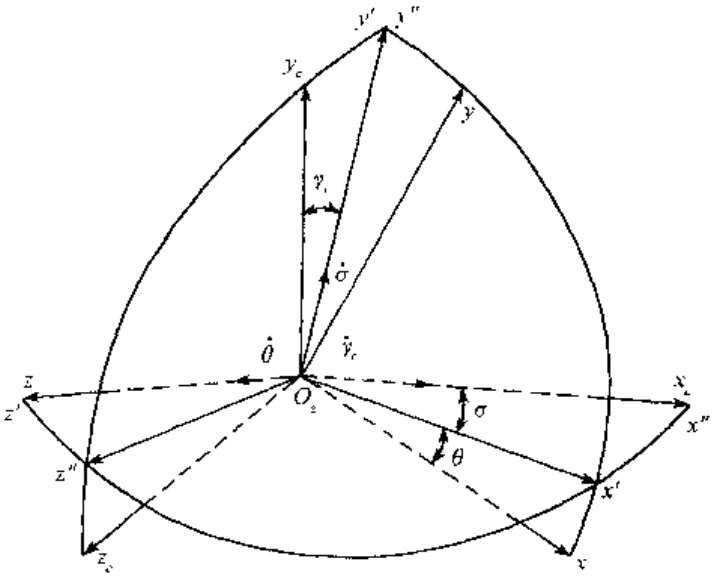


图 2-11

2.4.2 发射坐标系与速度坐标系间的关系

由发射坐标系与速度坐标系的定义可知，这两坐标系间的关系由 θ、σ 和 γ_c 三个欧拉角确定，因此建立这两坐标系间的关系和建立发射坐标系与弹体坐标系间关系的方法类似，即认为速度坐标系是由平移于导弹质心的发射坐标系经过三次旋转而得到的(图 2-11)。

由于速度坐标系与发射坐标间的关系同发射坐标系与弹体坐标系间的关系完全一样，因此只要将(2-2.4)中之角度 φ、ψ 及 γ 分别换成角 θ、σ 及 γ_c，即可得到以下与(2-2.4)式类似的发射坐标系与速度坐标系间的坐标变换式

$$[x] = \boldsymbol{C}_g^c [x_c] \tag{2-4.1}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_g^c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{2-4.2}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

各矩阵元素为

$$\begin{cases} c_{11} = \cos\theta\cos\sigma \\ c_{12} = \cos\theta\sin\sigma\sin\gamma_c - \sin\theta\cos\gamma_c \\ c_{13} = \cos\theta\sin\sigma\cos\gamma_c + \sin\theta\sin\gamma_c \\ c_{21} = \sin\theta\cos\sigma \\ c_{22} = \sin\theta\sin\sigma\sin\gamma_c + \cos\theta\cos\gamma_c \\ c_{23} = \sin\theta\sin\sigma\cos\gamma_c - \cos\theta\sin\gamma_c \\ c_{31} = -\sin\sigma \\ c_{32} = \cos\sigma\sin\gamma_c \\ c_{33} = \cos\sigma\cos\gamma_c \end{cases} \tag{2-4.3}$$

两坐标系间坐标变换表如表 2.7 所示。

表 2.7 发射坐标系与速度坐标系间关系表

	x_c	y_c	z_c
x	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y	c_{21}	c_{22}	c_{23}
z	c_{31}	c_{32}	c_{33}

描述发射坐标系与速度坐标系间关系的角度 θ、σ 和 γ_c 分别称为弹道倾角、弹道偏角和倾斜角，其定义如下：

弹道倾角 θ：速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 在 xo_2y 平面（射面）内的投影与 ox 轴间的夹角。当投影在 ox 轴之上方时，θ 角为正，反之为负。

弹道偏角 σ：速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 与 xo_2y 平面间的夹角。当速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 在 xo_2y 平面左边（顺 ox 轴正方向看去）时，σ 为正，反之为负。

倾斜角 γ_c：o_2z_c 轴与 x_co_2z 平面间的夹角。当 o_2z_c 轴在 x_co_2z 平面下方时，γ_c 为正，反之为负。

根据定义，弹道倾角 θ 是衡量导弹速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 相对发射点水平面倾斜程度的一个标志，而弹道偏角 σ 则是衡量导弹速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 偏离射面程度的尺度，至于倾斜角 γ_c 则是衡量处于导弹纵对称面内的 o_2y_c 轴相对射面倾斜程度的一个量。

在主动段，由于导弹在控制系统作用下飞行，角度 σ 及 γ_c 一般均比较小，因面有时可略去不计。

2.4.3 弹体坐标系与速度坐标系间的关系

从速度坐标系定义可知，由于 o_2y_c 轴与 o_2y_1 轴在同一平面内，这样，两坐标系间关系只需用两个欧拉角来描述。换言之，速度坐标系只要按照一定顺序旋转两次便可得到弹体坐标系（图 2-12）。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

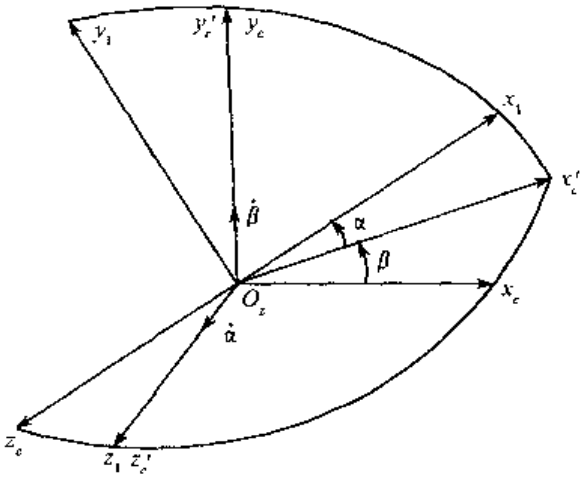


图 2-12

根据图 2-12,弹体坐标系与速度坐标系间的坐标变换式为

$$[x_1] = \boldsymbol{C}_b^c[x_c] \tag{2-4.4}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_b^c = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{2-4.5}$$

两坐标系间关系表如表 2.8 所示。

表 2.8 弹体坐标系与速度坐标系间关系表

	x_c	y_c	z_c
x_1	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha\sin\beta$
y_1	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\sin\beta$
z_1	$\sin\beta$	0	$\cos\beta$

欧拉角 α 和 β 则分别称为冲角(或攻角)和侧滑角,其定义及几何意义如下:

攻角 α:导弹速度矢 $\boldsymbol{V}$ 在导弹纵对称平面 $x_1o_zy_1$ 内的投影与弹体轴 o_zx_1 间的夹角。当其投影在 o_zx_1 轴下方时,α 为正,反之为负。

侧滑角 β:导弹速度矢 $\boldsymbol{V}$ 与弹体纵对称面 $x_1o_zy_1$ 间的夹角。当速度矢 $\boldsymbol{V}$ 在纵对称面右边(顺 o_zx_1 轴正向看去)时,β 为正,反之为负。

由上述定义可知,飞行冲角 α 是衡量导弹速度矢 $\boldsymbol{V}$ 相对弹体轴上下倾斜程度的一个标志,而侧滑角 β 则是度量速度矢 $\boldsymbol{V}$ 相对纵对称平面左右偏离程度的一个尺度。

不言而喻,随着速度坐标系旋转顺序的不同,所得冲角和侧滑角的定义也必然不同,这里我们是采用了通常的旋转方法而定义的。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§2.5 轨迹坐标系

在研究导弹质心运动时，有时在轨迹坐标系中建立运动方程更为方便些，因此这里也有必要介绍一下轨迹坐标系。

2.5.1 轨迹坐标系[e]($o_c x_2 y_2 z_2$)

轨迹坐标系亦称半速度坐标系。该坐标系的坐标原点仍取在导弹质心 o_c 上；$o_c x_2$ 轴与导弹速度矢 V 一致；$o_c y_2$ 轴位于射击平面 xoy 内，且垂直于 $o_c x_2$ 轴，指向上方；$o_c z_2$ 轴与 $o_c x_2$、$o_c y_2$ 轴构成右手直角坐标系（图 2－13）。

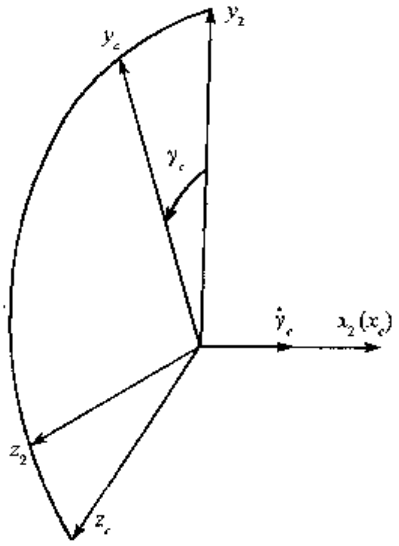


图 2－13

2.5.2 速度坐标系与轨迹坐标系间的关系

根据上述定义，轨迹坐标系与速度坐标系间只有一个欧拉角，即倾斜角。因此只需将轨迹坐标系绕 $o_c x_2$ 轴旋转一次就可使两坐标系重合。这样，两坐标系间的坐标变换式为

$$[x_c] = C_c^e[x_2] \tag{2-5.1}$$

其中

$$C_c^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_c & \sin\gamma_c \\ 0 & -\sin\gamma_c & \cos\gamma_c \end{bmatrix} \tag{2-5.2}$$

两坐标系间的关系如表 2.9 所示。

表 2.9 速度坐标系与轨迹坐标系间关系表

	x_2	y_2	z_2
x_c	1	0	0
y_c	0	$\cos\gamma_c$	$\sin\gamma_c$
z_c	0	$-\sin\gamma_c$	$\cos\gamma_c$

2.5.3 发射坐标系与轨迹坐标系间的关系

由前边可知，发射坐标系与速度坐标系间存在有 θ、σ 及 γ_c 三个欧拉角，而轨迹坐标系与速度坐标系间却只有一个欧拉角 γ_c，因此 γ_c 为零时的发射坐标系与速度坐标系间的关系矩阵，即为发射坐标系与轨迹坐标系间的关系矩阵，即

$$[x] = C_g^e[x_2] \tag{2-5.3}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$C_g^c = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma & -\sin\theta & \cos\theta\sin\sigma \\ \sin\theta\cos\sigma & \cos\theta & \sin\theta\sin\sigma \\ -\sin\sigma & 0 & \cos\sigma \end{bmatrix} \tag{2-5.4}$$

其坐标变换表如表 2.10 所示。

表 2.10 发射坐标系与轨迹坐标系间的关系表

	x_z	y_z	z_z
x	$\cos\theta\cos\sigma$	$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\sigma$
y	$\sin\theta\cos\sigma$	$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\sigma$
z	$-\sin\sigma$	0	$\cos\sigma$

2.5.4 弹体坐标系与轨迹坐标系间的关系

在轨迹坐标系中建立导弹质心运动方程时，需要将作用于导弹上的推力和控制力投影在轨迹坐标系各轴上，而推力和控制力是相对于弹体坐标系给出的，因而需要寻找轨迹坐标系与弹体坐标系间的关系。

根据弹体坐标系与速度坐标系以及速度坐标系与轨迹坐标系之间的关系式(2-4.4)和式(2-5.1)，可得弹体坐标系与轨迹坐标系间的坐标变换式

$$[x_1] = C_b^c \cdot [x_2] \tag{2-5.5}$$

其中

$$C_b^c = C_b^c \cdot C_c^c = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\gamma_c + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_c & \sin\alpha\sin\gamma_c - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_c \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma_c - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_c & \cos\alpha\sin\gamma_c + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_c \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\gamma_c & \cos\beta\cos\gamma_c \end{bmatrix} \tag{2-5.6}$$

其坐标变换表如表 2.11 所示。

表 2.11 弹体坐标系与轨迹坐标系间的关系表

	x_2	y_2	z_2
x_1	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\cos\gamma_c + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_c$	$\sin\alpha\sin\gamma_c - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_c$
y_1	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\gamma_c - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_c$	$\cos\alpha\sin\gamma_c + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_c$
z_1	$\sin\beta$	$-\cos\beta\sin\gamma_c$	$\cos\beta\cos\gamma_c$

根据正交矩阵的性质，不难写出轨迹坐标系与弹体坐标系间坐标变换关系式

$$[x_2] = C_c^b [x_1] \tag{2-5.7}$$

其中

$$C_c^b = C_b^{c\mathrm{T}} \tag{2-5.8}$$

$C_b^{c\mathrm{T}}$ 为矩阵 C_b^c 的转置矩阵。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§2.6 坐标系间的四元数表示法

坐标变换解算的方法很多，传统的解算方法有三参数法、六参数法和九参数法。三参数法是解两坐标系中的三个欧拉角(如 φ、ψ 及 γ)。为了解出此三个欧拉角，必须解算根据(2-2.8)式导出的欧拉角速度方程组，即

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma}{\cos\psi} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \omega_{x1} + (\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma)\mathrm{tg}\psi \end{cases} \tag{2-6.1}$$

如果知道任一瞬时角速度 ω_{x1}、ω_{y1}、ω_{z1}，那么在给定的条件下，解方程组(2-6.1)式便可求出 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\gamma(t)$。但在解欧拉角速度方程组时常遇到两个问题。一是方程组为非线性变系数微分方程组，这只能用数值积分法求解，且工作量大；二是在大姿态角情况下(如 $\psi \to \frac{\pi}{2}$)，会引起较大的计算误差；当 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 时，方程又是奇异的。用六参数法或九参数法解欧拉角关系方程时，则需要满足六个非线性约束方程，计算起来也十分不便。而用四元数法解决上述问题时，则有如下三个优点：

(1) 四元数方程是线性微分方程，只有一个约束条件，而且便于计算，其计算工作量仅是解欧拉方程的 35% 左右；

(2) 在进行模拟和数字计算时，精度高于欧拉方程，且不会出现奇异现象；

(3) 可直接用四元数作为捷联系统的控制量，便于系统分析和讨论。

四元数的基本概念，早在 1843 年 B·P 哈密顿就提出来了，但一直停留在理论概念探讨阶段，没有得到广泛实际的应用。20 世纪 70 年代，尤其近年来，由于航天技术、数字计算机计算技术的发展，才促进了四元数理论和技术的应用(四元数的有关知识参见附录 1)。

采用在同一坐标系内，用四元素表示的空间矢量绕定点连续旋转三次的方法，便可推出两空间直角坐标系的关系。例如用四元素表示的惯性坐标系与弹体坐标系间关系矩阵为

$$[x^a] = \boldsymbol{A}_a^b[x_1] \tag{2-6.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_a^b = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2-6.3}$$

(2-6.3)式与表 2.6 比较，可得欧拉角 $\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$、$\bar{\gamma}$ 与四元素之间的关系式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \tilde{\text{tg}\varphi} = \dfrac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\ \tilde{\sin\psi} = 2(q_0 q_2 - q_1 q_3) \\ \bar{\text{tg}\varphi} = \dfrac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \end{cases} \qquad (2-6.4)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第三章 推力、控制力和控制力矩

弹道导弹在大气层中飞行时，受有地球引力、发动机推力和控制力、空气动力及其力矩的作用。当考虑地球旋转时，导弹还受因其旋转产生的牵连惯性力和柯氏惯性力的作用。在这一章中，我们讨论发动机推力、控制力和控制力矩产生的机理及其计算方法。

§3.1 发动机推力

3.1.1 火箭发动机推力

火箭发动机尽管有液体和固体火箭发动机之分，但因两者推力产生的机理相同，因而下面导出的基本推力计算式对它们均适用。

根据将在第六章里讨论的变质量质点系动力学基本定理，当忽略导弹质心相对移动速度和加速度时，其质心运动方程可写成

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{F}_{rel} \tag{3-1.1}$$

式中

$\boldsymbol{F}$ 为作用于导弹上的合外力矢；

$\boldsymbol{F}_k$ 为导弹转动时流动质点产生的柯氏惯性力矢；

$\boldsymbol{F}_{rel}$ 为导弹的相对力和反作用力合矢，即

$$\boldsymbol{F}_{rel}=-\dot{m}\boldsymbol{V}_e-\frac{\delta}{\delta t}(\dot{m}\boldsymbol{r}_e) \tag{3-1.2}$$

其中，$\boldsymbol{V}_e$ 及 $\boldsymbol{r}_e$ 分别为火箭发动机喷口截面处的燃气相对平均速度矢及导弹质心到喷口截面处喷出质量质心的矢径(轴对称流动时即为导弹质心到喷口截面中心的矢径)。

对弹道式导弹来说，相对 $\boldsymbol{V}_e$ 而言，由于 $\frac{\delta}{\delta t}\boldsymbol{r}_e$ 及 $\frac{\delta}{\delta t}\dot{m}$ 均为小量，因此(3-1.2)式可简化为

$$\boldsymbol{F}_{rel}=-\dot{m}\boldsymbol{V}_e \tag{3-1.3}$$

在火箭发动机推力的研究中，推力常用 $\boldsymbol{P}$ 表示，燃气相对弹体的喷射速度用 $\boldsymbol{u}$ 表示，于是

$$\boldsymbol{P}=-\dot{m}\boldsymbol{u} \tag{3-1.4}$$

式中 $\dot{m}=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 称为推进剂质量秒消耗量，它表示单位时间内消耗的推进剂质量。

由(3-1.4)式不难看出，发动机推力方向与燃气流方向恰恰相反，当发动机安装轴线与弹体纵轴一致时，则发动机推力大小可表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$P = \dot{m}u \tag{3-1.5}$$

由此可知，发动机推力 P 取决于其推进剂质量秒消耗量 $\dot{m}$ 与燃气喷射速度 u，即当推进剂秒消耗量 $\dot{m}$ 越大，或者说单位时间内喷出的推进剂生成物越多时，则其推力越大；当喷出的燃气相对弹体的速度 u 越大，或者说推进剂蕴藏着的化学能越高、燃烧室及喷管设计越好时，则推力也就越大。

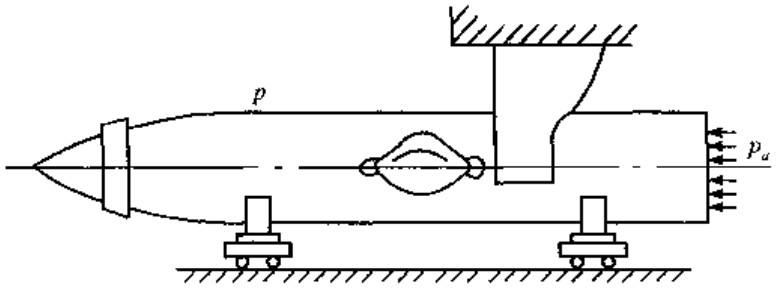


图 3-1

由于(3-1.5)式反映的仅仅是燃气动量变化所产生的推力，因此通常称为理论推力(或动推力)。虽然它们已反映了推力产生的实质，但还没有包括许多客观因素的影响，因此发动机推力的实际值是以试车时(图 3-1)的实际测量值为依据的。

从图 3-1 看出，发动机地面试车时，弹体表面上还受有外界大气压 p 和发动机喷管口截面上燃气静压力 p_a 的作用，它们也会产生一部分推力。假设发动机喷口截面积为 S_a，那末燃气静压力 p_a 在喷管截面积上产生的推力即为 $S_a p_a$，且方向向前。显然，它使发动机推力增加。

由于导弹轴对称性，所以作用于导弹弹体表面上的大气静压力在垂直于弹体轴方向上的分力互相抵消，而沿弹体纵轴方向上的分量，则因喷管截面积 S_a 上没有大气静压力 p 的作用，故其轴向分量为 $S_a p$，且方向向后。显然，它使发动机推力减小。

由大气静压力 p 和燃气静压力 p_a 所产生的合推力

$$S_a p_a - S_a p = S_a(p_a - p) \tag{3-1.6}$$

与动推力相对应，此项推力常称为静推力(或压差推力)。

综合(3-1.5)与(3-1.6)式，则发动机推力为

$$P = \dot{m}u + S_a(p_a - p) \tag{3-1.7}$$

从上式看出，发动机推力不仅与推进剂质量秒消耗量 $\dot{m}$ 和喷管截面处燃气排气速度 u 及其燃气静压力 p_a 有关，而且与外界大气压力 p 也有关系。根据大气静压力 p 随高度 H 的增加而连续地减小的特性，显然，发动机推力则随飞行高度 H 的增加而增加，即发动机推力 P 是导弹飞行高度 H 的函数。在火箭发动机理论中，我们把推力随高度而变化的规律称为发动机推力高度特性。

在地面试车时，由于大气压力 p 等于地面标准大气压力 p_0，且其值最大，所以发动机推力值

$$P_0 = \dot{m}u + S_a(p_a - p_0)$$

最小；而在真空条件下试车时，由于大气压力 $p = 0$，则发动机推力值

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$P_{x0} = \dot{m}u + p_a S_a$$

最大。计算表明,导弹从地面飞行到真空时,发动机推力增加约 15% ~ 20% 左右。

3.1.2 发动机主要性能指标

1. 额定推力

在弹道计算中,为方便起见,常将(3-1.7)式变换为

$$\begin{aligned} P &= \dot{m}u + S_a(P_a - P) \\ &= P_{x0} - S_a p_0 \left(\frac{p}{p_0}\right) \\ &= P_0 + S_a p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \end{aligned} \tag{3-1.8}$$

式中

$S_a p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$随高度 H 而变化,称为发动机推力高度特性修正项。而$\frac{p}{p_0}$则采用标准大气模型计算;

$$P_0 = \dot{m}u + S_a(p_a - p_0) \tag{3-1.9}$$

为地面额定工作条件下的发动机实测推力,称为地面额定推力;

$$P_{x0} = \dot{m}u + p_a S_a \tag{3-1.10}$$

为真空额定工作条件下的发动机实测推力,称为真空额定推力。

2. 比推力

单位时间内发动机消耗一千克重量推进剂所产生的推力称为比推力,亦称比冲,用 P_b 表示。它是衡量发动机性能的主要参数之一。

根据定义,发动机地面比推力和真空比推力可分别表为

$$\begin{cases} P_{b0} = P_0 / \dot{G}_0 \\ P_{bx} = P_{x0} / \dot{G}_0 \end{cases} \tag{3-1.11}$$

$\dot{G}$ 为推进剂重量秒消耗量地面额定值。

将(3-1.11)式代入(3-1.8)式,则推力计算式又可表为

$$\begin{aligned} P &= P_{b0}\dot{G}_0 + S_a p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \\ &= P_{bx}\dot{G}_0 - S_a p_0 \left(\frac{p}{p_0}\right) \end{aligned} \tag{3-1.12}$$

3. 混合比

在弹道和诸元计算中,还经常用到推进剂混合比的概念。

推进剂混合比是指氧化剂重量秒消耗量 $\dot{G}_y$ 与燃烧剂重量秒消耗量 $\dot{G}_R$ 之比值,常用 K 表示,即

$$K = \dot{G}_y / \dot{G}_R \tag{3-1.13}$$

混合比是衡量发动机性能的一个主要参数。为使发动机取得较佳性能,不同种类的推进剂有着不同的混合比。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

3.1.3 导弹飞行中的发动机推力计算

我们知道,液体火箭发动机的工质是按一定比例配制成的液体状态的推进剂,而对固体火箭发动机来说,它的工质则是按一定混合比制成的固体状态药柱型推进剂。由于两者的推进剂状态不同,因此它们的实际推力计算式就有显著的差别。

对于液体火箭发动机而言,由(3-1.8)式知,影响推力大小的因素很多,而推进剂秒流量、推进剂混合比和比推力等则是影响推力大小的主要因素。

在导弹实际飞行中,由于发动机的工作环境与地面试车时的环境不可能完全相同,这就必然产生推进剂秒消耗量偏差、推进剂混合比偏差和比推力偏差,因而产生推力偏差。在弹道计算中,常常认为导弹飞行中的发动机推力是由地面额定条件下试车时的实测推力和因推进剂秒流量、混合比和比推力变化而产生的推力修正量等部分组成。

据上所述,导弹飞行中的发动机实际推力计算式可表为

$$P = P_0 + S_a p_0 \left(1 - \frac{p_a}{p_0}\right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{G}}\delta\dot{G} + \frac{\partial P}{\partial K}\delta F_{\varphi C} + \dot{G}\Delta P_b \tag{3-1.14}$$

式中

$$\begin{cases} \delta\dot{G} = \dot{G} - \dot{G}_0 = \delta\dot{G}_y + \delta\dot{G}_R \\ \dot{G} = \dot{G}_y + \dot{G}_R \\ \dot{G}_0 = \dot{G}_{y0} + \dot{G}_{R0} \\ \delta\dot{G}_y = \dot{G}_y - \dot{G}_{y0} \\ \delta\dot{G}_R = \dot{G}_R - \dot{G}_{R0} \\ \delta F_{\varphi c} = F_{\varphi c} - C_{\varphi c} \end{cases} \tag{3-1.15}$$

$\dot{G}$、$\dot{G}_0$ 为推进剂重量秒消耗量实际值和额定值;

$\dot{G}_y$、$\dot{G}_{y0}$ 为氧化剂重量秒消耗量实际值和额定值;

$\dot{G}_R$、$\dot{G}_{R0}$ 为燃烧剂重量秒消耗量实际值和额定值;

$\delta\dot{G}_y$、$\delta\dot{G}_R$ 为推进剂重量秒消耗量偏差;

$\frac{\partial P}{\partial \dot{G}}\delta\dot{G}$ 为推进剂重量秒消耗量偏差对推力的修正量;

$\frac{\partial P}{\partial K}\delta F_{\varphi C}$ 为推进剂混合比偏差对推力的修正量;

$\dot{G}\Delta P_b$ 为比推力偏差对推力的修正量;

$F_{\varphi C}$ 为发动机的工作效率,它是推进剂混合比 $K = K_0 + \delta K$ 的函数,K_0 为推进剂额定混合比;

$\frac{\partial P}{\partial \dot{G}}$、$\frac{\partial P}{\partial K}$、$C_{\varphi C}$ 均为常系数,可通过发动机测试资料表查取。

由液体火箭发动机装置工作过程可知,推进剂比重偏差,推进剂启动活门入口处压力偏差是影响推进剂重量秒消耗量变化的主要因素。推进剂比重偏差越大,其重量秒消耗量相应地增加;反之,则秒消耗量相应地减小。推进剂启动活门入口处压力的变化,与很多因素有关(如推进剂贮箱增压方式,发动机安装角等)。例如,地面试车时,推进剂贮箱

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为固定增压方式，其压力为常值，而在实际飞行中，由于采用泵压式自生增压方式，因而推进剂贮箱压力是变化的；又如地面试车时，发动机与地面有一固定的安装角，而导弹实际飞行时，由于弹体不断向目标方向转动，则其与地面之夹角也在不断地变化着；再如，地面试车时，由于发动机是固定在试车台上的，因而不产生附加动压力。但在实际飞行中，不仅推进剂自身产生静压力，而且由于飞行速度不断变化还会产生附加动压力；等等。

综上所述，由于实际飞行条件与发动机地面试车条件的不同，所以导弹飞行中的发动机推进剂重量秒消耗量偏差 $\delta\dot{G}_y$ 和 $\delta\dot{G}_R$、推进剂启动活门入口处压力偏差 δp_{0y} 和 δp_{0R} 以及混合比偏差 δK 的存在是一个客观现实，必须加以考虑。通常按下式计算：

$$\begin{cases}
\delta\dot{G}_R = C_{11}\delta p_{0R} + C_{12}\delta p_{0y} + C_{14}\delta\gamma_R + C_{15}\delta\gamma_y + C_{16}\delta p_h + C_{17}F_{\varphi K} \\
\delta\dot{G}_y = C_{21}\delta p_{0R} + C_{22}\delta p_{0y} + C_{24}\delta\gamma_R + C_{25}\delta\gamma_y + C_{26}\delta p_h + C_{27}F_{\varphi K} \\
\delta K = C_{31}\delta p_{0R} + C_{32}\delta p_{0y} + C_{34}\delta\gamma_R + C_{35}\delta\gamma_y + C_{36}\delta p_h + C_{37}F_{\varphi K} \\
\delta p_{0R} = (p_R - p_{0R}) + C_{41}n_x + C_{42} \\
\delta p_{0y} = (p_y - p_{0y}) + C_{51}n_x + C_{52} \\
p_R = p_{Rz} + 0.1\gamma_{R0}h_R n_x + C_{pR} \\
p_y = p_{yz} + 0.1\gamma_{y0}h_y n_x + C_{py} \\
F_{\varphi k} = \varphi_k - C_{\varphi k} \\
\delta\gamma_R = \gamma_R - \gamma_{R0} \\
\delta\gamma_y = \gamma_y - \gamma_{y0}
\end{cases} \tag{3-1.16}$$

式中，$C_{i6}\delta p_h\ (i=1,2,3)$ 为外界大气压力变化引起的推进剂秒流量偏差和混合比偏差；

$C_{i7}F_{\varphi K}$ 为发动机燃烧效率对推进剂秒消耗量偏差和混合比偏差的影响；

φ_k、$C_{\varphi K}$ 分别为发动机燃烧效率实际值和标准值；

$\delta\gamma_y$、$\delta\gamma_R$ 分别为氧化剂和燃烧剂比重偏差；

p_R、p_y 分别为燃烧剂和氧化剂启动活门入口实际压力；

p_{0R}、p_{0y} 分别为燃烧剂和氧化剂启动活门入口额定压力；

h_R、h_y 分别为燃烧剂和氧化剂贮箱内推进剂液面至启动活门的液柱高度；

p_{Rz}、p_{yz} 分别为燃烧剂和氧化剂贮箱增压压力；

γ_{y0}、γ_{R0} 分别为推进剂标准比重；

n_x 为导弹轴向过载系数；

$C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{py}$ 为发动机试车时由试验得出的系数，称为发动机推力小偏差方程系数。

计算表明，由于推进剂混合比偏差和比推力偏差所产生的推力偏差不大，因外界大气压力偏差和发动机燃烧效率所产生的推进剂重量秒消耗量偏差也均为小量，因此根据发动机类型和对其推力、推进剂秒消耗量计算精度的不同要求，常将它们忽略不计，则(3－1.14)式和(3－1.16)式便进一步简化为

$$P = P_0 + S_a p_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{G}}(\delta\dot{G}_R + \delta\dot{G}_y) \tag{3-1.17}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\begin{cases} \delta\dot{G}_R = C_{11}\delta p_{0R} + C_{12}\delta p_{0y} + C_{14}\delta\gamma_R + C_{15}\delta\gamma_y \\ \delta\dot{G}_y = C_{21}\delta p_{0R} + C_{22}\delta p_{0y} + C_{24}\delta\gamma_R + C_{25}\delta\gamma_y \\ \delta p_{0R} = (p_R - p_{0R}) + C_{41}n_x + C_{42} \\ \delta p_{0y} = (p_y - p_{0y}) + C_{51}n_x + C_{52} \\ p_R = p_{Rz} + 0.1\gamma_{R0}h_R n_x + C_{pR} \\ p_y = p_{yz} + 0.1\gamma_{y0}h_y n_x + C_{py} \\ \delta\gamma_R = \gamma_R - \gamma_{R0} \\ \delta\gamma_y = \gamma_y - \gamma_{y0} \end{cases} \tag{3-1.18}$$

应当指出，(3-1.16)或(3-1.18)式仅为单台液体火箭发动机重量秒消耗量偏差计算式，但对于各级泵—机系统(涡轮泵与发动机自成独立系统的总称)均可适用。对于由四台发动机并联组成的动力装置，在计算推进剂总秒流量 $\delta\dot{G}_y$ 及 $\delta\dot{G}_R$ 时，应在(3-1.16)或(3-1.18)第一、二式 中同乘以 4；但对于仍由四台发动机并联组成，而推进剂却由同一涡轮泵系统供给的动力装置来说，在计算其推进剂总秒流量 $\delta\dot{G}_y$ 及 $\delta\dot{G}_R$ 时，就不应再乘以 4 了。

如果两级弹道导弹第二级动力装置由一台主发动机和四台小游动发动机并联而成，当只计及导弹飞行中推进剂重量秒消耗量偏差对推力的影响时，其主发动机和游动发动机实际推力计算式可仿(3-1.17)式导出，即

$$\begin{cases} P_z = P_{z0} - S_{az}p_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right) + \left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}}\right)_z(\delta\dot{G}_{yz} + \delta\dot{G}_{Rz}) \\ P_u = P_{u0} - S_{au}p_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right) + \left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}}\right)_u(\delta\dot{G}_{yu} + \delta\dot{G}_{Ru}) \end{cases} \tag{3-1.19}$$

式中

$$\begin{cases} P_{z0} = \dot{m}_z u_z + S_{az}p_{az} \\ P_{u0} = \dot{m}_u u_u + S_{au}p_{au} \end{cases} \tag{3-1.20}$$

分别为主发动机和游动发动机真空额定推力；

S_{az}、S_{au} 分别为主发动机和游动发动机喷口截面积；

$\delta\dot{G}_{yz}$、$\delta\dot{G}_{Rz}$ 为主发动机推进剂重量秒消耗量偏差；

$\delta\dot{G}_{yu}$、$\delta\dot{G}_{Ru}$ 为游动发动机推进剂重量秒消耗量偏差；

$\left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}}\right)_z$、$\left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}}\right)_u$ 分别为主发动机和游动发动机推进剂重量秒消耗量变化所产生的推力变化率。

对于作为弹道导弹动力装置的固体火箭发动机来说，因其自身具有氧化剂、燃烧剂混合成型为固体药柱的特性，因此导弹飞行中的发动机推力计算式较之液体火箭发动机要简单得多，即为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$P = P_{b0}\left(\dot{G}_0 + \Delta\dot{G} + \frac{\Delta G_{TP}}{t_f - t_g}\right) + p_0 S_a\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$$
$$= P_{bz}\left(\dot{G}_0 + \Delta\dot{G} + \frac{\Delta G_{TP}}{t_f - t_g}\right) - p_0 S_a\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{3-1.21}$$

其中

P_{b0}、P_{bz}分别为固体火箭发动机地面额定比推力和真空额定比推力；

$\dot{G}_0$ 为固体火箭发动机推进剂重量秒消耗量额定值；

$\Delta\dot{G}_0$ 为药柱密度相等时的推进剂重量秒消耗量最大偏差；

$\frac{\Delta G_{TP}}{t_f - t_g}$为药柱密度不等时所产生的推进剂重量秒消耗量最大偏差；

t_f 为发动机工作时间；

t_g 为发动机点火至发动机喷管堵片打开的时间；

ΔG_{TP}为因药柱高度变化所产生的重量偏差。

3.1.4 发动机推力曲线分析

固体和液体弹道导弹火箭发动机推力随时间变化的规律如图 3-2 所示，其中(a)为单级弹道导弹固体火箭发动机推力曲线图，(b)为单级弹道导弹液体火箭发动机推力曲线图，(c)为两级弹道导弹液体火箭发动机推力曲线图。

由图 3-2 清楚地看出，单级导弹液体火箭发动机推力曲线与两级弹道导弹第一级液体火箭发动机推力随时间变化的曲线基本相似，所以我们就以后者为例，对其推力随时间变化的曲线进行分析。

1. 一级火箭发动机推力曲线

图(c)中 *ABCDE* 为一级发动机推力随时间变化的曲线，*A* 为导弹起飞瞬时点，该瞬时推力恰好等于导弹起飞重量。*B* 为发动机稳定工作状态瞬时点，推力略大于额定推力值(即有一推力峰值)，这是由于火药启动器继续工作、推进剂贮箱增压大的缘故。*AB* 段称为发动机启动段。在此段，发动机处于非稳定工作状态，推力和推进剂秒流量随时间增加而迅速增加，直至达到额定工作状态为止。*C* 为一级预令关机点，此时推进剂启动活门半关闭，推进剂秒流量急剧减少。*BC* 段称为一级发动机稳定工作段，在此段，发动机稳定工作，推进剂秒流量为常值，由于高度特性的影响，推力则随飞行高度的增加而逐渐增加，直至因大气压力影响程度减弱使其推力几乎不变。*ABC* 段统称发动机一级基本段。*D* 为一级主令关机点，此时推进剂启动活门全关闭，推进剂秒流量为零，*CD* 段称为一级过渡段。由于预令关机后的推进剂秒流量急剧下降，因此发动机推力随时间的增加而急骤下降。*E* 为一、二级分离点，*DE* 段称后效段。虽然在 *D* 点启动活门已关闭，秒流量下降为零，但由于输送管道和推力室内的剩余推进剂仍继续燃烧，所以推力不会立即下降为零。此段的推力称为后效推力，它与时间的乘积，则称为后效冲量。

2. 二级发动机推力曲线

图(c)中 *abcdef* 为第二级发动机推力随时间变化的曲线。*a* 为二级主发动机启动瞬时点，*b* 为二级发动机稳定工作瞬时点，*ab* 段称为二级启动段。*c* 为主发动机预令关机点

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

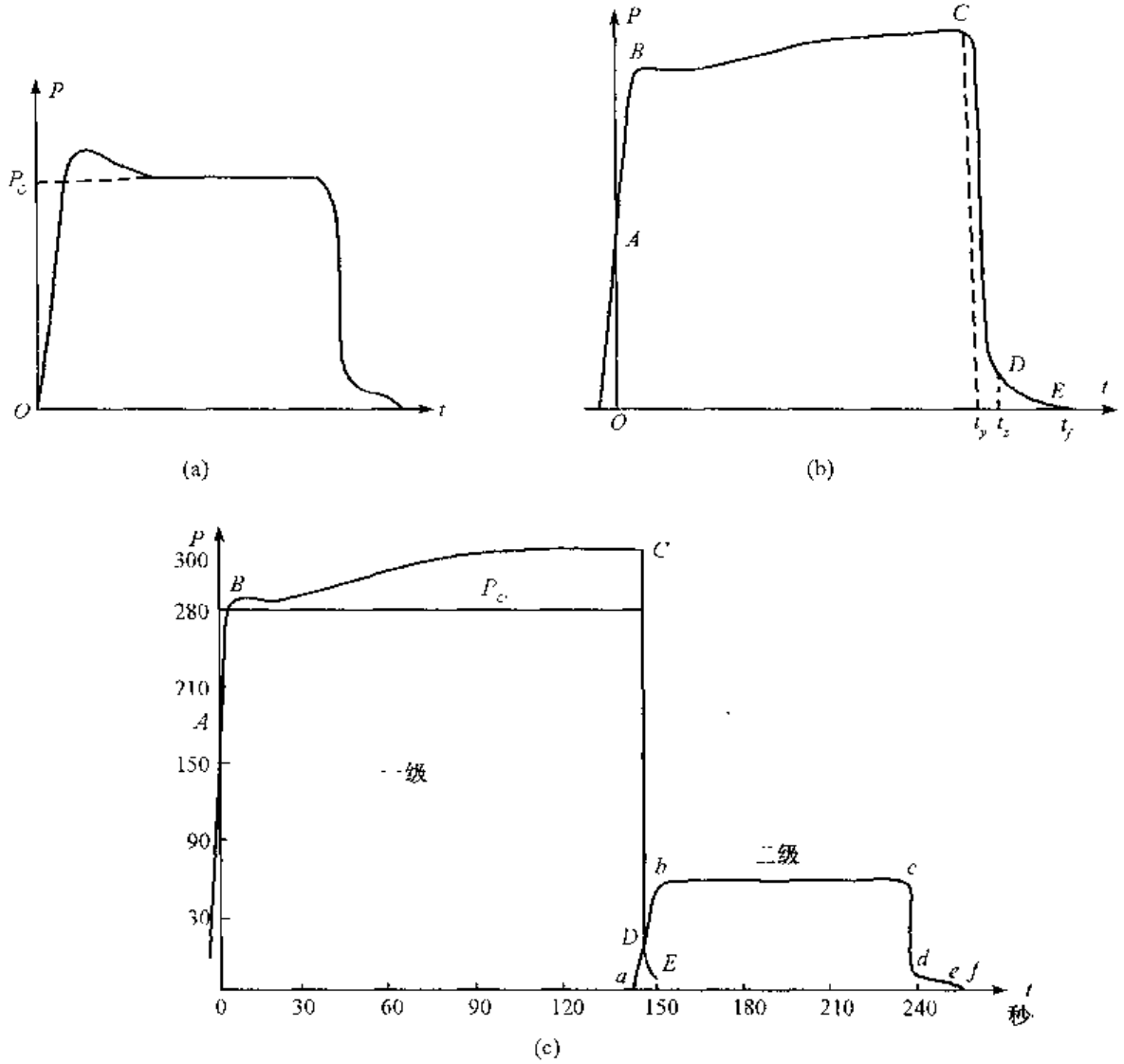


图 3-2

(即二级预令关机点),*bc* 段称为二级稳定段,而 *abc* 段统称二级基本段。*d* 为主发动机主令关机点,*e* 为游动发动机关机点(即二级主令关机点),*cde* 段称为二级末速修正段。*f* 为头体分离点,*ef* 段称为二级后效段。

因为二级发动机推力随时间变化的曲线与一级的基本相似,所以不再详述。下面着重强调几点:

(1)为了实现一、二级级间的热分离和分离后的导弹能在一定的推力下继续飞行,所以在一级发动机预令关机至主令关机的一段时间内,二级主发动机必须启动,并在一、二级分离后的很短时间内达到其稳定工作状态;

(2)为提高头体分离点处运动参数的精度,在二级主发动机发出主令关机后的较长一段时间内(一般约为十几秒),游动发动机应处于稳定工作状态;

(3)由于一级发动机和二级主发动机的推力均较大,为减小因关机时推力急剧变化对导弹运动的影响,所以它们采用二次关机方式。这种关机方式,不仅因小的后效冲量引起

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的弹着点散布小，且也因导弹分离时的相互碰撞力小而有利于弹上仪器的正常工作。而游动发动机，因推力较小而采用一次关机方式。这样，既不会造成上述情况的不利影响，相反，还具有关机简单的优点。

最后还需指出，由计算表明，式(3－1.17)中的后两项的值是比较大的，尤其是推力高度特性修正项的值更大。若以发动机喷口截面积为 $3.24m^2$，地面标准大气压力为 $10332kg/m^2$ 估计时，其推力高度特性修正项最大值可达 33.5t，约占额定推力的 12% 左右，若以 $\delta\dot{G}_y$ 的最大值 30kg/s、$\delta\dot{G}_R$ 的最大值 3kg/s 和 $\frac{\partial p}{\partial \dot{G}}$ 为 289.1kg/kg/s 估计推力偏差量时，其最大值也可达 9.5t，它约占额定推力的 3% 左右。由此可见，发动机推力高度特性和推进剂秒流量偏差对推力的影响是万万不可忽视的。

§3.2 控制力和控制力矩

导弹之所以能够飞行，并准确地命中目标，完全是由于发动机推力、控制力和控制力矩作用的结果。所谓控制飞行(即程序飞行)，就是指完成某一给定的飞行任务而依据其相应的控制方案不断地改变导弹质心速度大小和方向的飞行。

众所周知，导弹在飞行过程中，受有地球引力、空气动力和发动机推力的作用。由于地球引力作用线通过导弹质心，且其大小也不能随意改变，因而无法对导弹质心产生控制力矩。显然，对导弹飞行进行控制的力和力矩就只能是通过改变空气动力或发动机推力方向来产生。控制导弹飞行的力和力矩分别称为控制力和控制力矩。

对于弹道导弹，目前用于产生控制力和控制力矩的机构有以下几种形式：空气舵、燃气舵、摆动发动机、摆动喷管和二次喷射以及与之相应的伺服机构，并根据要求单独采用其中的一种形式，也可以两种不同形式同时采用。

以空气舵作为产生控制力和控制力矩的操纵机构，因依赖于大气而受到飞行高度的限制，因此，这种控制机构常用于在稠密大气层中飞行的地对空、空对空以及战略飞航式导弹；对于地对地弹道式导弹来说，它只适用于近程导弹，而且也只能起着辅助控制的作用。

由于空气舵与燃气舵、摆动发动机与摆动喷管产生控制力和控制力矩的原理及其数学表达式基本相似，所以我们只讨论燃气舵、摆动发动机和二次喷射控制形式的控制原理。

3.2.1 燃气舵产生的控制力和控制力矩

燃气舵是安装在火箭发动机喷管出口处燃气流中的一种控制舵面(图 3－3)，由石墨或其它耐高温材料制成，当其相对燃气流偏转时，便产生改变导弹飞行方向和姿态的控制力和控制力矩。它通常为“＋”型布局，在喷口处的排列顺序是：从导弹尾部向前看去，按顺时针方向编号，当导弹垂直竖起在发射台上时，位于导弹纵对称平面内的Ⅰ、Ⅲ舵恰好处于射击平面内，Ⅰ舵朝向目标瞄准方向。当Ⅰ、Ⅲ舵同步偏转时，由于舵面相对燃气流冲角的改变，便产生作用于舵面的燃气侧向力，并对导弹质心产生偏航力矩，以控制导弹

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的偏航运动；当Ⅰ、Ⅲ舵差动偏转时，则将产生绕弹轴滚动的控制力矩，以控制导弹的滚动运动。Ⅱ、Ⅳ舵位于导弹横对称平面内，当其同步偏转时，便产生俯仰力矩，以控制导弹在射击平面内按预定程序稳定飞行；当其差动时也可控制导弹的滚动运动，但一般只用于同步转动而不实施差动运动。

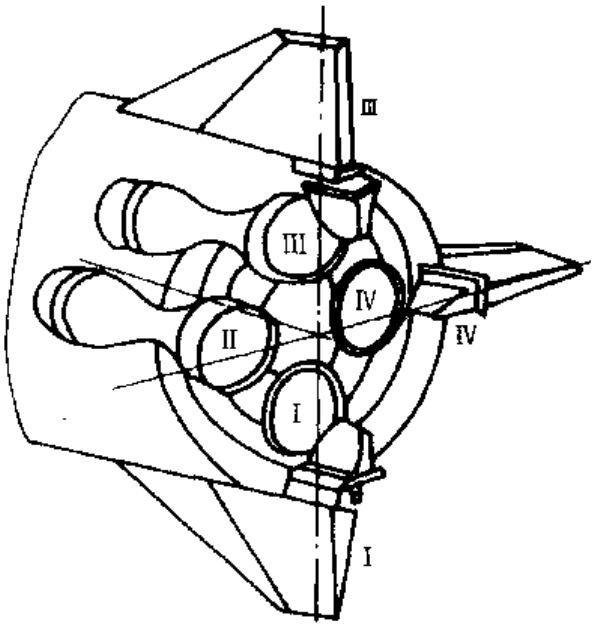


图 3-3

为便于确定控制力和控制力矩的方向，对上述“+”型布局的燃气舵偏角通常规定：当导弹作负俯仰运动时，Ⅱ、Ⅳ舵的偏角 $\delta_{Ⅱ}$、$\delta_{Ⅳ}$ 定义为正，反之为负。此外，为便于计算控制力和控制力矩，通常又引进当量（等效）舵偏角的概念，其含义是与实际舵偏角具有相同控制力矩时的平均舵偏角，且规定产生负向控制力矩时的当量舵偏角为正，反之为负。这样，对应于三种控制力矩的当量舵偏角分别称为当量俯仰角 δ_φ、当量偏航角 δ_ψ 和当量滚动角 δ_γ。

根据实际舵偏角和当量舵偏角的定义，则舵偏角间的关系可表为

$$\begin{cases} \delta_\varphi = \dfrac{1}{2}(\delta_{Ⅱ} + \delta_{Ⅳ}) \\ \delta_\psi = \dfrac{1}{2}(\delta_{Ⅰ} + \delta_{Ⅲ}) \\ \delta_\gamma = \dfrac{1}{2}(\delta_{Ⅲ} - \delta_{Ⅰ}) \end{cases} \tag{3-2.1}$$

燃气流作用在燃气舵上的合作用力矢量在弹体坐标系各轴上的分量（图 3-4）为

$$\begin{cases} X_{1c} = 4C_{x1j}q_jS_j \\ Y_{1c} = 2C_{y1j}q_jS_j \\ Z_{1c} = -2C_{z1j}q_jS_j \end{cases} \tag{3-2.2}$$

其中

C_{x1j}、C_{y1j}、C_{z1j} 分别为燃气舵轴向力系数，法向力系数和侧向力系数；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

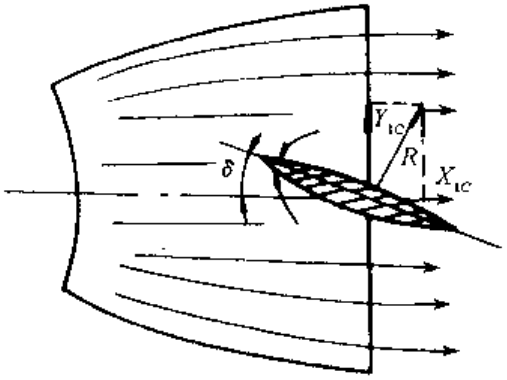


图 3-4

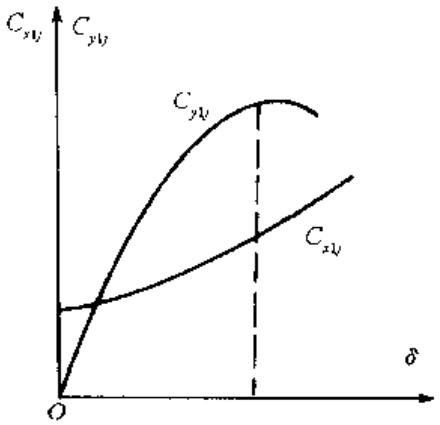


图 3-5

$q_j = \frac{1}{2}\rho_j u_j^2$ 为燃气流动压力；

u_j 为流经燃气舵的燃气平均喷射速度；

ρ_j 为燃气流密度；

S_j 为单个燃气舵的特征面积。

燃气流气动力系数可由发动机试车时测出，也可以利用经验公式计算。经计算表明，气动力系数不仅与舵偏角有关，而且还与舵的形状及燃气速度有关。对于液体火箭发动机来说，当发动机处于稳定工作状态时，燃气速度变化不大，可近似认为常数，这样对于给定形状的燃气舵，作用于舵面的阻力、升力(法向力)和力矩仅仅是舵偏角的函数。因此用燃气舵来控制导弹使之按预定程序飞行要比空气舵稳定得多。

经验表明，气动力系数与燃气舵偏角 δ 的关系如图 3-5 所示。从图中清楚地看出，在相当大的舵偏角范围内，其法向力系数 c_{y1j} 可近似认为与舵偏角 δ 成线性关系。于是，燃气流所产生的控制力和控制力矩可分别表为

$$\begin{cases} X_{1c} = 4C_{x1j}q_jS_j \\ Y_{1c} = 2C_{y1j}^{\delta}\delta_\varphi q_jS_j = R'\delta_\varphi \\ Z_{1c} = -2C_{y1j}^{\delta}\delta_\psi q_jS_j = -R'\delta_\phi \end{cases} \tag{3-2.3}$$

及

$$\begin{cases} M_{x1c} = -R'(x_{ry} - x_x)\delta_\varphi = M_{x1c}^{\delta}\delta_\varphi \\ M_{y1c} = -R'(x_{ry} - x_x)\delta_\psi = M_{y1c}^{\delta}\delta_\psi \\ M_{x1c} = -R'z_{ry}\delta_\gamma = M_{x1c}^{\delta}\delta_\gamma \end{cases} \tag{3-2.4}$$

其中

C_{y1j}^{δ} 为燃气舵法向力系数对当量舵偏角的导数，且当燃气舵为“+”型布局时，$C_{y1j}^{\delta} = C_{z1j}^{\delta}$；

$R' = 2C_{y1j}^{\delta}q_jS_j$ 为一对燃气舵的控制力梯度；

x_{ry}、x_x 分别为燃气舵铰链轴和导弹质心至导弹头部理论尖端的距离；

z_{ry} 为燃气舵铰链轴至弹体纵轴的距离；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$M_{y1c}^{\delta} = M_{x1c}^{\delta} = -R'(x_{zy} - x_z)$$

和

$$M_{x1c}^{\delta} = -R'z_{zy}$$

分别为俯仰、偏航和滚动控制力矩对当量舵偏角的导数。因规定当量舵偏角为正时控制力矩为负值，故控制力矩对当量舵偏角的导数均为负值。

导弹飞行中，位于高速高温燃气流中的燃气舵，因烧蚀作用，必然发生变形，这将导致燃气舵阻力和控制力梯度变化，当考虑到这一影响因素时，燃气舵阻力和控制力梯度可表为

$$\begin{cases} X_{1c} = X_{1c0}(1 + \eta t)\dfrac{P}{P_0} \\ R' = R'_0(1 - \zeta t)\dfrac{P}{P_0} \end{cases} \tag{3-2.5}$$

其中

X_{1c0}、R'_0 分别为发动机试车时的燃气舵阻力和控制力梯度；

η、ζ 分别为因舵烧蚀而对舵阻力和控制力梯度的影响修正系数，由试验确定；

t 为发动机工作时间。

习惯上，我们常把燃气舵阻力 X_{1c} 视为发动机推力在燃气舵上的损失，并将损失后的推力称为有效推力，用 P_e 表示，因而

$$P_e = P - X_{1c}$$

用燃气舵作为产生控制力和控制力矩的控制机构，具有结构简单和可在没有大气的高空中起到控制作用的优点。但同时也存在因燃气舵阻力较大而造成推力损失较大以及因其烧蚀变形而使控制力和控制力矩发生变化的缺点。因此这种舵一般只用于发动机工作时间不长的中近程弹道式导弹上。

3.2.2 摇摆发动机产生的控制力和控制力矩

借助于发动机摆动来改变推力方向，产生控制力和控制力矩以实现对导弹飞行姿态的控制是弹道式导弹控制的发展趋势。因为这种控制方式具有不受大气密度和发动机工作时间长短的限制以及能够产生较大控制力和控制力矩的优点。它已广泛地应用于远程弹道式导弹的控制上。

摇摆发动机组有“×”型和“+”型两种安装形式。由于前者比后者的控制效率高，因而常被用于需要较大控制力和控制力矩的多级弹道导弹的第一级。

1.“×”型布局的控制力和控制力矩

由四台摇摆发动机并联而成的“×”型布局的发动机组，其摇摆发动机相当于安装在一个正四棱锥体四侧面的底边上，安装轴线相当于锥体侧面底边的中线，且与弹体纵轴构成 μ 安装角。发动机可在锥体侧面内摆动，其摆动角 δ 正负定义如下：从导弹尾部向前看去，当发动机喷管沿弹体圆周线顺时针摆动时，δ 定义为正，反之为负(图 3-6(a))。

显然，当发动机不摆动时，各台发动机推力线方向沿各自的安装轴线方向，而其合推力方向则必将沿弹体轴 o_1x_1 的正方向，此力只能使导弹质心产生运动而不能产生绕质心

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

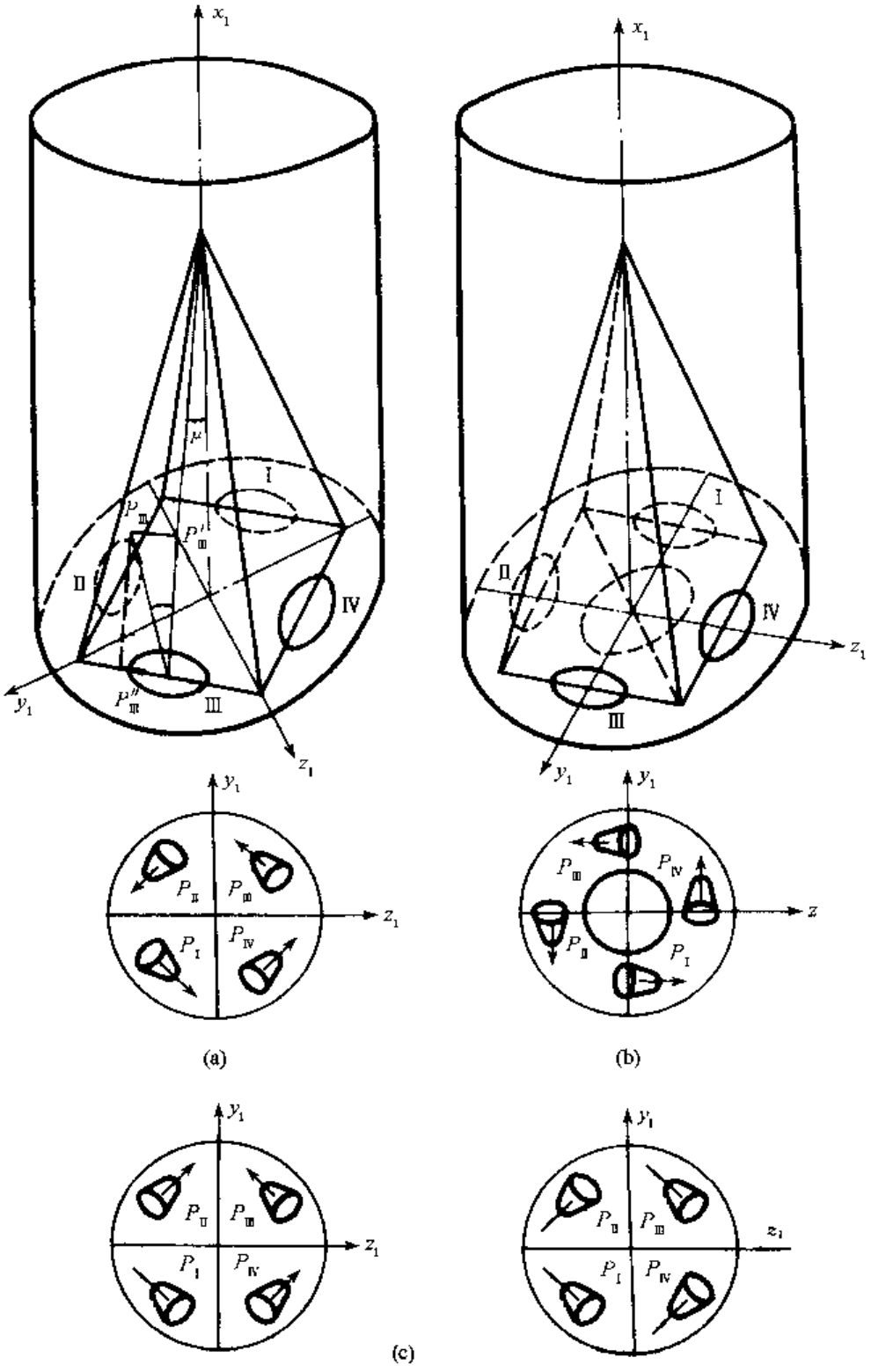


图 3-6

的转动,要使导弹转动就必须摆动发动机。

如果四台发动机同时摆动 δ 正角,则各台发动机推力线与其安装轴线之间也必然构

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

成正 δ 角。将每台发动机推力 $P_i(i=\text{Ⅰ}、\text{Ⅱ}、\text{Ⅲ}、\text{Ⅳ})$分解为沿其安装轴线方向上的分量 P'_i 和垂直于安装轴线方向上的分量 P''_i(图 3-6(a)),其分量 P'_i 之合成量可使导弹质心运动,而垂直于安装轴线方向上的分量 P''_i 则可使导弹产生绕其纵轴的负滚动运动;反之,若发动机同时摆动负 δ 角时,则导弹必然产生绕其纵轴的正滚动运动。

同样道理,当组成"×"型布局的四台发动机按一定规律同时摆动时,则导弹也必然同时产生与之相应的俯仰、偏航运动(图 3-6(c))。由此得出结论:"×"型布局的发动机按一定规律摆动时均可控制导弹的俯仰、偏航和滚动三个运动姿态。

为计算方便,像燃气舵当量舵偏角那样,我们也引进发动机当量摆动角的概念,其含义和表示方法与燃气舵当量舵偏角相同。

根据发动机摆动角 $\delta_{\text{Ⅰ}}、\delta_{\text{Ⅱ}}、\delta_{\text{Ⅲ}}、\delta_{\text{Ⅳ}}$ 及发动机当量摆动角 $\delta_\varphi、\delta_\psi、\delta_\gamma$ 的定义,则有

$$\begin{cases}\delta_\gamma-\delta_\varphi-\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅰ}}\\ \delta_\gamma-\delta_\varphi+\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅱ}}\\ \delta_\gamma+\delta_\varphi+\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅲ}}\\ \delta_\gamma+\delta_\varphi-\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅳ}}\end{cases}\tag{3-2.6}$$

或者

$$\begin{cases}\delta_\varphi=\dfrac{1}{4}(-\delta_{\text{Ⅰ}}-\delta_{\text{Ⅱ}}+\delta_{\text{Ⅲ}}+\delta_{\text{Ⅳ}})\\ \delta_\psi=\dfrac{1}{4}(-\delta_{\text{Ⅰ}}+\delta_{\text{Ⅱ}}+\delta_{\text{Ⅲ}}-\delta_{\text{Ⅳ}})\\ \delta_\gamma=\dfrac{1}{4}(\delta_{\text{Ⅰ}}+\delta_{\text{Ⅱ}}+\delta_{\text{Ⅲ}}+\delta_{\text{Ⅳ}})\end{cases}\tag{3-2.7}$$

由于导弹在控制系统作用下飞行时的滚动运动很小,所以发动机当量摆动角 δ_γ 也很小。当近似认为 $\delta_\gamma=0$ 时,则(3-2.6)式简化为

$$\begin{cases}-\delta_\varphi-\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅰ}}\\ -\delta_\varphi+\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅱ}}\\ \delta_\varphi+\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅲ}}\\ \delta_\varphi-\delta_\psi=\delta_{\text{Ⅳ}}\end{cases}\tag{3-2.8}$$

将摆动后的发动机推力投影于弹体坐标系各轴上,显然,沿 o_1x_1 轴方向的合推力分量因只能推动导弹质心运动,而不能使其绕质心转动,故将其称为发动机有效推力;而沿 o_1y_1 及 o_1z_1 轴方向上的合推力分量因可改变导弹速度方向和控制导弹绕质心的俯仰和偏航运动,因而分别称为法向控制力和横向控制力。

现以第Ⅲ台发动机为例来推导有效推力和控制力。

若第Ⅲ台发动机摆动正 $\delta_{\text{Ⅲ}}$ 时,则推力 $P_{\text{Ⅲ}}$ 在其安装轴线方向上的分量 $P'_{\text{Ⅲ}}$ 和垂直于安装轴线方向上的分量 $P''_{\text{Ⅲ}}$ 可分别表为(图 3-7)

$$P'_{\text{Ⅲ}}=P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}$$

$$P''_{\text{Ⅲ}}=P_{\text{Ⅲ}}\sin\delta_{\text{Ⅲ}}$$

因此 $P'_{\text{Ⅲ}}$ 和 $P''_{\text{Ⅲ}}$ 在弹体坐标系各轴上的分量为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

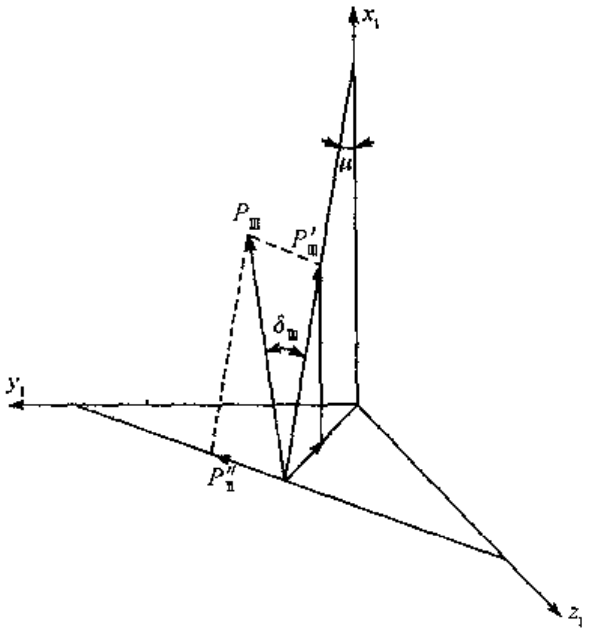


图 3-7

$$\begin{cases} P'_{\text{Ⅲ}x1} = P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\cos\mu \\ P'_{\text{Ⅲ}y1} = -P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\sin\mu\cos45^\circ \\ P'_{\text{Ⅲ}z1} = -P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\sin\mu\cos45^\circ \\ P''_{\text{Ⅲ}x1} = 0 \\ P''_{\text{Ⅲ}y1} = P_{\text{Ⅲ}}\sin\delta_{\text{Ⅲ}}\cos45^\circ \\ P''_{\text{Ⅲ}z1} = -P_{\text{Ⅲ}}\sin\delta_{\text{Ⅲ}}\cos45^\circ \end{cases} \tag{3-2.9}$$

用同样方法，也可将第Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ台发动机摆动后的推力投影于弹体坐标系各轴上(表3.1)。这样，将投影于 o_1x_1 轴上的推力分量 $P_i\cos\delta_i\cos\mu$ 进行叠加，即得

$$P_{x1} = (P_{\text{Ⅰ}}\cos\delta_{\text{Ⅰ}} + P_{\text{Ⅱ}}\cos\delta_{\text{Ⅱ}} + P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}} + P_{\text{Ⅳ}}\cos\delta_{\text{Ⅳ}})\cos\mu \tag{3-2.10}$$

由于四台发动机属于同一型号，因而有

$$P_{\text{Ⅰ}} = P_{\text{Ⅱ}} = P_{\text{Ⅲ}} = P_{\text{Ⅳ}} = \frac{1}{4}P \tag{3-2.11}$$

P 为四台发动机推力之和。

将(3-2.8)和(3-2.11)式代入(3-2.10)式，则得

$$P_{x1} = \frac{P}{4}\cos\mu[2\cos(\delta_\varphi + \delta_\psi) + 2\cos(\delta_\varphi - \delta_\psi)] = P\cos\mu\cos\delta_\varphi\cos\delta_\psi$$

故发动机有效推力为

$$P_e = P_{x1} = P\cos\mu\cos\delta_\varphi\cos\delta_\psi \tag{3-2.12}$$

根据表 3.1，可得发动机推力在 o_1y_1、o_1z_1 轴上投影之和

$$\begin{cases} P_{y1} = R'\sin\delta_\varphi\cos\delta_\psi \\ P_{z1} = -R'\sin\delta_\psi\cos\delta_\varphi \end{cases} \tag{3-2.13}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

表 3.1 “×”字型布局发动机摆动后的在弹体坐标系轴上的投影

		P_{x1}	P_{y1}	P_{z1}
$P_{\text{Ⅰ}}$	$P'_{\text{Ⅰ}}$	$P_{\text{Ⅰ}}\cos\delta_{\text{Ⅰ}}\cos\mu$	$P_{\text{Ⅰ}}\cos\delta_{\text{Ⅰ}}\cos45°\sin\mu$	$P_{\text{Ⅰ}}\cos\delta_{\text{Ⅰ}}\sin\mu\cos45°$
	P''_{1}	0	$-P_{1}\sin\delta_{1}\cos45°$	$P_{\text{Ⅰ}}\sin\delta_{\text{Ⅰ}}\cos45°$
$P_{\text{Ⅱ}}$	$P'_{\text{Ⅱ}}$	$P_{\text{Ⅱ}}\cos\delta_{\text{Ⅱ}}\cos\mu$	$-P_{\text{Ⅱ}}\cos\delta_{\text{Ⅱ}}\sin\mu\cos45°$	$P_{\text{Ⅱ}}\cos\delta_{\text{Ⅱ}}\sin\mu\cos45°$
	$P''_{\text{Ⅱ}}$	0	$-P_{\text{Ⅱ}}\sin\delta_{\text{Ⅱ}}\cos45°$	$-P_{\text{Ⅱ}}\sin\delta_{\text{Ⅱ}}\cos45°$
$P_{\text{Ⅲ}}$	$P'_{\text{Ⅲ}}$	$P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\cos\mu$	$-P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\sin\mu\cos45°$	$-P_{\text{Ⅲ}}\cos\delta_{\text{Ⅲ}}\sin\mu\cos45°$
	$P''_{\text{Ⅲ}}$	0	$P_{\text{Ⅲ}}\sin\delta_{\text{Ⅲ}}\cos45°$	$-P_{\text{Ⅲ}}\sin\delta_{\text{Ⅲ}}\cos45°$
$P_{\text{Ⅳ}}$	$P'_{\text{Ⅳ}}$	$P_{\text{Ⅳ}}\cos\delta_{\text{Ⅳ}}\cos\mu$	$P_{\text{Ⅳ}}\cos\delta_{\text{Ⅳ}}\sin\mu\cos45°$	$-P_{\text{Ⅳ}}\cos\delta_{\text{Ⅳ}}\sin\mu\cos45°$
	$P''_{\text{Ⅳ}}$	0	$P_{\text{Ⅳ}}\sin\delta_{\text{Ⅳ}}\cos45°$	$P_{\text{Ⅳ}}\sin\delta_{\text{Ⅳ}}\cos45°$

其中

$$R'=\frac{\sqrt{2}}{2}P \tag{3-2.14}$$

称为摇摆发动机控制力梯度，而 P_{y1} 和 P_{z1} 分别称为法向控制力和横向控制力。

由于发动机当量摆动角 δ_φ、δ_ψ 值不大，在近似计算中，可认为 $\sin\delta_\varphi\approx\delta_\varphi$，$\sin\delta_\psi\approx\delta_\psi$，$\cos\delta_\varphi\approx\cos\delta_\psi\approx1$，于是

$$\begin{cases}P_c=P\cos\mu\\P_{y1}=R'\delta_\varphi\\P_{z1}=-R'\delta_\psi\end{cases} \tag{3-2.15}$$

导弹飞行姿态的变化完全是由于控制力对其质心（或弹体坐标轴）构成的力矩作用的结果，我们将该力矩称为控制力矩。

设 x_z、x_{ry} 分别为导弹质心 o_z 和控制力作用点 o'（即发动机铰链轴）至其头部理论尖端的距离（图 3-8），根据力矩定义，则控制力 P_{y1} 及 P_{z1} 所产生的控制力矩可表为

$$\begin{cases}M_{x1c}\approx0\\M_{y1c}=P_{z1}(x_{ry}-x_z)\\M_{z1c}=-P_{y1}(x_{ry}-x_z)\end{cases} \tag{3-2.16}$$

M_{x1c}、M_{y1c}、M_{z1c} 分别称为滚动、俯仰和偏航控制力矩。

将(3-2.15)代入上式，则有

$$\begin{cases}M_{y1c}=-R'(x_{ry}-x_z)\delta_\psi\\M_{z1c}=-R'(x_{ry}-x_z)\delta_\varphi\end{cases} \tag{3-2.17}$$

或

$$\begin{cases}M_{y1c}=M^{\delta}_{y1c}\delta_\psi\\M_{z1c}=M^{\delta}_{y1c}\delta_\varphi\end{cases} \tag{3-2.18}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$M_{y1c}^{\delta} = M_{z1c}^{\delta} = -R'(x_{ry} - x_x) \tag{3-2.19}$$

分别称为偏航和俯仰控制力矩对发动机当量摆动角的导数。

2."+"型布局的控制力和控制力矩

由四台推力不大的游动发动机和一台推力较大的主发动机并联组成的"+"型布局的发动机组如图3-6(b)所示。主发动机沿弹体纵轴固定安装,用它来产生推力而不产生控制力和控制力矩。游动发动机"+"型布局于主发动机周围,其安装形式和摆动规律与"×"型布局的摆动发动机组相似(图3-6(a))。正因为这样,所以呈"+"型布局的游动发动机组同样能够对导弹飞行进行控制。因篇幅所限,其控制原理不再重述。

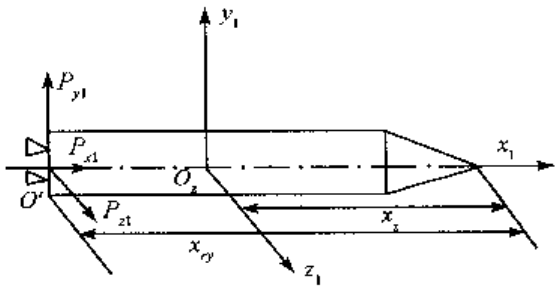


图3-8

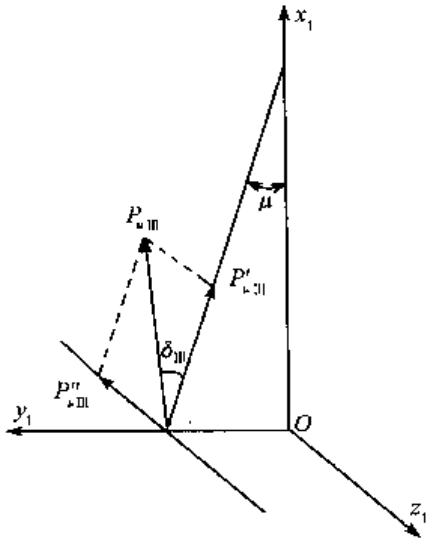


图3-9

采用与(3-2.6)式相同的推导方法,可得"+"型布局的游动发动机当量摆动角 δ_i($i=\varphi、\psi、\gamma$)与其实际摆动角 δ_j($j=$ Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ)间的关系式

$$\begin{cases} \delta_\gamma - \delta_\psi = \delta_{\text{I}} \\ \delta_\gamma - \delta_\varphi = \delta_{\text{II}} \\ \delta_\gamma + \delta_\psi = \delta_{\text{III}} \\ \delta_\gamma + \delta_\varphi = \delta_{\text{IV}} \end{cases} \tag{3-2.20}$$

或

$$\begin{cases} \delta_\varphi = \dfrac{1}{2}(\delta_{\text{IV}} - \delta_{\text{II}}) \\ \delta_\psi = \dfrac{1}{2}(\delta_{\text{III}} - \delta_{\text{I}}) \\ \delta_\gamma = \dfrac{1}{4}(\delta_{\text{I}} + \delta_{\text{II}} + \delta_{\text{III}} + \delta_{\text{IV}}) \end{cases} \tag{3-2.21}$$

将摆动后的游动发动机推力 P_{uj}($j=$ Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ)投影于弹体坐标系各轴上(图3-9,表3.2),并将同一坐标轴上之投影进行叠加,当顾及关系式

$$P_{u\text{I}} = P_{u\text{II}} = P_{u\text{III}} = P_{u\text{IV}} = P_u/4 \tag{3-2.22}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

时(P_u 为四台游动发动机推力之和),则

$$\begin{cases} P_{x1} = \dfrac{P_u}{2}\cos\mu\cos\delta_\gamma(\cos\delta_\varphi + \cos\delta_\psi) \\ P_{y1} = \dfrac{P_u}{2}(\sin\mu\sin\delta_\gamma\sin\delta_\psi + \cos\delta_\gamma\sin\delta_\varphi) \\ P_{z1} = \dfrac{P_u}{2}(\sin\mu\sin\delta_\gamma\sin\delta_\varphi - \cos\delta_\gamma\sin\delta_\psi) \end{cases}$$

在实际弹道解算中,一般 δ_γ 是一个小量,当近似认为 $\cos\delta_\gamma \approx 1, \sin\delta_\gamma \approx 0$,且令

$$R' = \frac{1}{2}P_u \tag{3-2.23}$$

时,则得

$$\begin{cases} P_{x1} = R'\cos\mu(\cos\delta_\varphi + \cos\delta_\psi) \\ P_{y1} = R'\sin\delta_\varphi \\ P_{z1} = -R'\sin\delta_\psi \end{cases} \tag{3-2.24}$$

其中

R' 为游动发动机控制力梯度;

P_{y1}、P_{z1} 分别为游动发动机产生的法向和横向控制力;

P_{x1} 为游动发动机有效推力。

在当量摆动角 δ_φ、δ_ψ 很小,可近似认为 $\sin\delta_\varphi \approx \delta_\varphi$、$\sin\delta_\psi \approx \delta_\psi$ 时,上式又可进一步简化为

$$\begin{cases} P_{x1} = R'\cos\mu(\cos\delta_\varphi + \cos\delta_\psi) \\ P_{y1} = R'\delta_\varphi \\ P_{z1} = -R'\delta_\psi \end{cases} \tag{3-2.25}$$

表 3.2 "+"型布局发动机摆动后的推力在弹体坐标系轴上的投影

		P_{x1}	P_{y1}	P_{z1}
$P_{u\text{I}}$	$P'_{u\text{I}}$	$P_{u\text{I}}\cos\delta_{\text{I}}\cos\mu$	$P_{u\text{I}}\cos\delta_{\text{I}}\sin\mu$	
	$P''_{u\text{I}}$			$P_{u\text{I}}\sin\delta_{\text{I}}$
$P_{u\text{II}}$	$P'_{u\text{II}}$	$P_{u\text{II}}\cos\delta_{\text{II}}\cos\mu$		$P_{u\text{II}}\cos\delta_{\text{II}}\sin\mu$
	$P''_{u\text{II}}$		$-P_{u\text{II}}\sin\delta_{\text{II}}$	
$P_{u\text{III}}$	$P'_{u\text{III}}$	$P_{u\text{III}}\cos\delta_{\text{III}}\cos\mu$	$-P_{u\text{III}}\cos\delta_{\text{III}}\sin\mu$	
	$P''_{u\text{III}}$			$-P_{u\text{III}}\sin\delta_{\text{III}}$
$P_{u\text{IV}}$	$P'_{u\text{IV}}$	$P_{u\text{IV}}\cos\delta_{\text{IV}}\cos\mu$		$-P_{u\text{IV}}\cos\delta_{\text{IV}}\sin\mu$
	$P''_{u\text{IV}}$		$P_{u\text{IV}}\sin\delta_{\text{IV}}$	

当计入主发动机推力 P_z 时,则"+"型布局的发动机组有效推力 P_e 为

$$P_e = P_z + R'\cos\mu(\cos\delta_\varphi + \cos\delta_\psi) \tag{3-2.26}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

由(3-2.14)和(3-2.23)式不难看出,"×"型布局时的发动机控制力梯度 R' 是"+"型布局时控制力梯度 R' 的$\sqrt{2}$倍,也就是说,前者的控制效率是后者的$\sqrt{2}$倍,因此"×"型布局的摇摆发动机常用于要求控制力较大的多级弹道导弹的第一级。但因其控制系统复杂和控制精度不高,却又成为这种布局时的主要缺点。由此得出结论:在要求控制力较大而控制精度不高的情况下,宜采用"×"型布局的摆动发动机组。

像推导(3-2.17)或(3-2.18)式一样,可导得游动发动机摆动时产生的控制力矩

$$\begin{cases} M_{y1c} = -R'(x_{ry} - x_s)\delta_\psi = M^{\delta}_{y1c}\delta_\psi \\ M_{z1c} = -R'(x_{ry} - x_s)\delta_\varphi = M^{\delta}_{z1c}\delta_\varphi \end{cases} \tag{3-2.27}$$

式中

x_{ry}、x_s 分别为游动发动机铰链轴和导弹质心至头部理论尖端的距离;

$M^{\delta}_{y1c} = M^{\delta}_{z1c} = -R'(x_{ry} - x_s)$为游动发动机控制力矩对其当量摆动角的导数。

3.2.3 二次喷射方式产生的控制力和控制力矩

用于改变发动机推力方向和产生控制力、控制力矩的二次喷射方式,已广泛地应用于固体弹道导弹上。

应用二次喷射方式来控制导弹运动的原理,就是在发动机喷管某一侧面,向喷管内垂直喷注气体或液体,使受扰动的主燃气流附面层分离,改变其流动方向,并产生控制力和控制力矩(图3-10),以控制导弹运动。

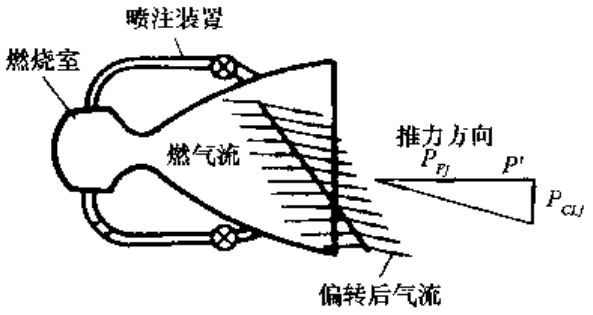


图3-10

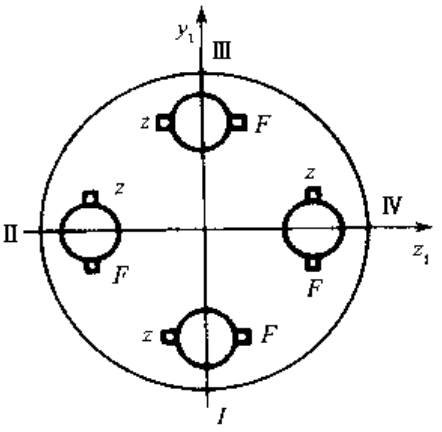


图3-11

由四台推力大小相等的固体火箭发动机并联构成"+"型布局的发动机组如图3-11所示。固体发动机安装轴线与弹体纵轴平行,其排列顺序与"+"型布局的摇摆发动机相同。每台发动机喷管侧面均有两个大小相等,且又相互对称的二次喷射启动活门。它们不能同时启开(图3-11),当控制信号为正时,z 边的喷射启动活门打开;反之,F 边的启动活门打开。喷射启动活门的这种有规律的打开或关闭的组合,便可实现控制导弹的俯仰、偏航和滚动运动。

喷射启动活门启开高度与其当量启开高度间的关系宛如发动机摆动角与其当量摆动角一样,因此,根据发动机启动活门布局特点,可得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} h_{F\mathrm{I}} = h_{F\delta\psi} - h_{F\delta\gamma} \\ h_{F\mathrm{II}} = h_{F\delta\varphi} - h_{F\delta\gamma} \\ h_{F\mathrm{III}} = h_{F\delta\psi} + h_{F\delta\gamma} \\ h_{F\mathrm{IV}} = h_{F\delta\varphi} + h_{F\delta\gamma} \end{cases} \tag{3-2.28}$$

其中

$h_{Fj}(j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$为二次喷射启动活门的开启高度；

$h_{Fi}(i = \delta_\varphi, \delta_\psi, \delta_\gamma)$分别为与导弹俯仰、偏航和滚动力矩有关的二次喷射启动活门的当量开启高度。

下面讨论二次喷射方式产生的控制力和控制力矩。

由图 3-10 可知，当无二次喷射时，因固体火箭发动机推力 P' 方向与其自身安装轴线平行，故其合推力作用线沿弹体纵对称轴；当有二次喷射时，因注入喷管内的气体或液体使燃气主流偏转，从而产生指向开启喷射活门一边的附加侧向力 P_{cLj} 和附加轴向力 P_{Fj}。当令

$$C = \frac{P_F}{P_{cL}} \tag{3-2.29}$$

其中

$$\begin{cases} P_F = \sum P_{Fj} \\ P_{cL} = \sum |P_{cLj}| \end{cases} \tag{3-2.30}$$

P_F 为合附加轴向力，P_{cL} 为合附加侧向力，于是

$$P_F = CP_{cL} = C\sum |P_{cLj}| \tag{3-3.31}$$

当顾及发动机无二次喷射时的推力为时，则有效推力为

$$P_e = P' + P_F = P' + C\sum |P_{cLj}| \tag{3-2.32}$$

在发动机推力线无偏斜条件下，用二次喷射方式产生的控制力和控制力矩为

$$\begin{cases} P_{y1} = P_{cL\mathrm{II}} + P_{cL\mathrm{IV}} \\ P_{z1} = P_{cL\mathrm{I}} + P_{cL\mathrm{III}} \end{cases} \tag{3-2.33}$$

及

$$\begin{cases} M_{x1c} = (P_{cL\mathrm{III}} - P_{cL\mathrm{I}} + P_{cL\mathrm{II}} - P_{cL\mathrm{IV}})z_{r\gamma} \\ M_{y1c} = (P_{cL\mathrm{I}} + P_{cL\mathrm{III}})(\bar{x}_{r\gamma} - \bar{x}_z)l_k \\ M_{z1c} = -(P_{cL\mathrm{II}} + P_{cL\mathrm{IV}})(\bar{x}_{r\gamma} - \bar{x}_z)l_k \end{cases} \tag{3-2.34}$$

其中

$$\bar{x}_{r\gamma} - \bar{x}_z = \frac{x_{r\gamma} - x_z}{l_k} \tag{3-2.35}$$

$x_{r\gamma}$ 为控制力作用点至导弹头部理论尖端的距离；

x_z 为导弹质心至头部理论尖端的距离；

$z_{r\gamma}$ 为控制力作用点至导弹纵轴的距离；

l_k 为导弹壳体总长度。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第四章 地球引力和重力

众所周知，位于地球引力场中飞行的弹道导弹，除受有已讨论过的发动机推力和控制力以及后面将要讨论的空气动力及其力矩作用外，还受有举足轻重的、作用始终的地球引力的作用。如果考虑地球旋转对弹道导弹运动的影响，其上除作用有上述几种力和力矩外，还作用有因地球旋转而产生的牵连惯性力和柯氏惯性力。

地球引力是作用于导弹上的主要力，其对运动的影响很大。在主动段，它始终使导弹飞行速度减小，有时可使其主动段终点速度相对理想速度减少竟达 30% 左右。尤其在占全弹道近 90% 左右的被动段，除经过再入段时有一部分空气动力作用外，其余部分只受地球引力的作用。另外，从控制观点看，今后将会知道，作为导弹的三大主要战术技术指标中的射程和射击精度，完全取决于导弹主动段关机点位置和速度大小及其方向等参数，而导弹的飞行速度和位置则又是地球引力加速度和视加速度（即惯性敏感元件测得的加速度）的函数，即

$$\begin{cases} V_i = \int_0^t (\dot{W}_i + g_i)\mathrm{d}t + V_i(0) \\ i = \int_0^t V_i \mathrm{d}t + i(0) \end{cases} \qquad (i = x, y, z)$$

因此，地球引力计算值的精确与否，直接影响导弹的射程和射击精度。为使导弹能够按照预先要求的射程和射击精度命中目标，就必须精确测量作用于弹上的地球引力以及与此相关联的地球形状和外部扰动引力场。

在讨论地球引力及其外部扰动引力时，必将涉及到《地球重力学》课程中的许多概念。只因篇幅所限，这里不再作详细介绍，必要时，读者可参考有关资料。

§4.1 地球的运动及形状

讨论地球运动及形状，并非本课程的范畴，但由于导弹是在地球引力场内飞行的，这又不能不涉及到地球。

4.1.1 地球的运动

按照牛顿万有引力定律，宇宙中一切具有质量的物体相互间都存在有引力的作用，其大小与两物体的质量乘积成正比，与距离的平方成反比，而其方向则沿两物体质心的连线，从被吸引物体指向吸引物体。作为具有一定质量的导弹，飞行中不仅承受有地球引力的作用，而且也必受有诸如太阳和月球等其它星球的吸引力作用。但是，由于导弹临近地球飞行，相距太阳和其它星球均比较远，相比之下，太阳及其它星球对导弹运动的影响极

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

小,完全可以略去不计。换言之,在讨论导弹运动时,我们只考虑地球对它的影响。地球对导弹运动的影响,除了地球引力作用外,它的运动和形状也还有不同程度的影响,这是因为:

(1)地球绕其自转轴从西向东不停地转动,其自转周期按平太阳时计算为23h56min4.1005s,因而地球自转速度的大小为

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.1006} = 7.292115 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}$$

而其方向则沿地球自转轴从南极指向北极;

(2)地球绕太阳以平均轨道速度29.89km/s公转;

(3)地轴以周期约18.6年和幅度不超过9.2″作章动;

(4)地球相对于天球黄道面的垂直轴以25800年的周期进动;

(5)地球随同太阳系一起相对于其他星球运动。

这样看来,地球的这些运动对导弹飞行都有一定程度的影响。从原则上讲,在建立描述导弹运动规律的数学模型时应加以考虑,然而实践表明,除地球绕其自转轴的转动外,其它的运动对导弹飞行的影响极小,可不予以考虑。这就是说,在建立导弹运动方程时,可近似认为地球相对太阳作匀速直线运动(即略去公转)、自转轴方向不变(即不计章动和进动)以及自转角速度为常值的一个星体。

4.1.2 地球的形状

地球是一个相当复杂的实体,其自然表面(或称物理表面)的30%左右地区是陆地,而70%左右地区则是被海水覆盖着。地球自然表面起伏不平,有的地区竟高出海水面几千米,但也有的地区则又低于海水面几千米。地球内部质量的分布不仅不均匀,而且由于其从西向东的自转结果,使其形状成一扁球体,以致两极间的距离小于其赤道直径。地球的这种形状不规则和内部质量分布不均匀性,自然给确定作用于导弹上的地球引力的大小和方向造成了一定困难。

为了获得各大地诸元数据,在通常被称为地球物理表面的地球自然表面上进行各种测量时,安装测量仪器总是以铅垂线(即重力线)为依据和以静止海水面作为起算面的。但由于地球物理表面的复杂性以致使其法线不与重力线重合,因而地球物理表面而不能作为处理各种测量结果的基准面。为此,就需要用一个大小和形状与真实地球非常接近的、且与重力线相垂直的物理表面来表示真实的地球表面。在描述地球形状的几何形体中,被称为大地水准面包围的几何形体是最接近于实际地球体的(图4-1)。所谓大地水准面是指与静止海水平面相重合的一个等重力位水准面,而这个等重力位水准面则是一个垂直于重力线的、不受潮水和

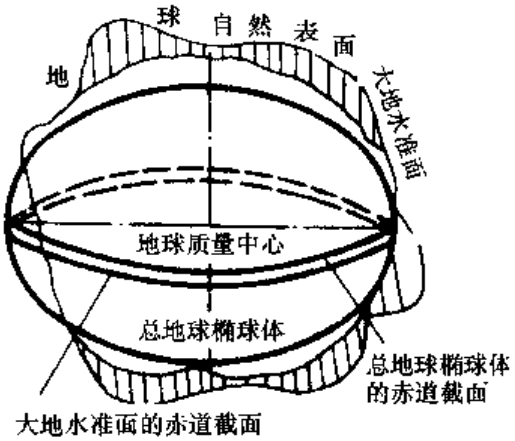


图4-1

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

海浪影响的且可延伸到大陆之下的、没有摺皱与裂痕的包围地球的连续封闭的曲面。大地水准面所包围的几何体称为大地体。由于该大地水准面也是一个很复杂的曲面，它同样无法用数学方法加以描述，因此，我们还需要寻找一个与大地体表面(大地水准面)差别尽可能小的、且便于用数学方法描述的几何体来代替大地体。

在全球范围内，最接近于大地体的椭球体是所谓总地球椭球体(也称水准椭球体、平均总椭球体或正常地球椭球体)，简称总椭球体，其主要参数如下：

地球自转角速度	$\omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ 1/s
椭球体长半轴长度	$a = 6378140$m
椭球体扁率	$\tilde{\alpha} = 1/298.257 = 0.00335281$
椭球体扁率常数	$\mu = 26.33281 \times 10^{24}$ m^5/s^2
地心引力常数	$fM = 3.986005 \times 10^{14}$ m^3/s^2
引力常数	$f = 6.672 \times 10^{-11}$ $m^3/kg \cdot s^2$
地球质量	$M = 5.974228118 \times 10^{24}$ kg
地球平均半径	$\bar{R} = 6371000$m
质量与重量换算常数	$\tilde{g}_0 = 9.80665 m/s^2$
地球形状动力学系数	$J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$

应当指出，上述参数只有 ω、a、fM 及 J_2 四个量是基本(实测)参数，而其余的参数均为导出参数。

总椭球体在全球范围内同大地体最为接近，它提供了一个最好的地球数学模型和物理模型，并为研究地球形状和重力场提供了基础。但是对于某一局部地区或某一国家来说，总椭球体表面未必与该地区或该国家的大地水准面很吻合，因此为减小椭球体表面代替大地水准面所带来的误差，在一个地区或一个国家又引进参考椭球体的概念。参考椭球体是一个由大小适当并与所在地区或国家的大地水准面吻合最佳的封闭曲面构成的椭球体，如适应于前苏联地区的克拉索夫斯基椭球体就是其中之一。克拉索夫斯基参考椭球体主要参数如下：

$a = 6378245$m

$\tilde{\alpha} = 1/298.3 = 0.003352$

$\omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ 1/s

$fM = 3.98620 \times 10^{14}$ m^3/s^2

$f = 6.673 \times 10^{-11}$ $m/s^2 \cdot kg$

$\mu = 26.2977 \times 10^{24}$ m^5/s^2

$\tilde{R} = 6371110$m

$\bar{g}_0 = 9.80665$ m/s^2

在 20 世纪 80 年代以前，我们一直采用克拉索夫斯基参考椭球体，后来我们才逐渐推广应用 1978 年国家测绘总局和总参测绘局颁布的“1975 年第十六届国际大地测量与地球物理协会(IUGG)及国际大地测量联合会(IAG)”讨论推荐的正常椭球体(简称“IAG－75”正常地球椭球体)，它现在已广泛应用于我国宇航部门及导弹武器运用部门。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§4.2 地球引力

由第一节可知，地球是一个表面起伏不平而内部质量分布又不均匀的球体.要精确计算和确定如此复杂的真实地球对其外部任一点的引力大小和方向是相当困难甚至是不可能的。在弹道学中.为计算方便，且又能满足预先给定的要求，常把地球近似认为质量分布均匀的圆球体或正常地球椭球体。但对于射程远、精度要求高的弹道导弹来说，则必须考虑真实地球表面的不规则性和内部质量分布的不均匀性所造成的影响。以后将会看到，地球扰动引力正是考虑这种影响而作为正常地球椭球体引力的一种修正。

4.2.1 地球为圆球体时的引力位及其引力

由《地球重力学》可知，地球对其外部空间任一质点的引力所做的功只取决于该质点的位置而与其路径无关。因而当地球引力场为有势力场时，匀质圆球体地球外部任意点 P 之引力位函数可表示为

$$U = fM\frac{m}{r} \tag{4-2.1}$$

式中

m 为地球外任意一点 P 的质量；

r 为点 P 到地心的距离；

$fM = 3.986005 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$ 为地心引力常数

对于地球外任一单位质量质点，其引力位函数为

$$U = fM\frac{1}{r} \tag{4-2.2}$$

由上式看出，当地球为匀质圆球体时，其外部任一点 P 所具有的引力位等于其全部质量集中于球心时对其外部点的引力位。

根据“引力位对任意方向上的偏导数等于引力在该方向上的分量”的位函数特性，可得地球为圆球体时单位质量质点的地球引力(引力加速度)大小

$$g = \frac{\partial U}{\partial r} = -fM\frac{1}{r^2} \tag{4-2.3}$$

其方向由 p 点指向地心。

当地球平均半径 $\bar{R} = 6371000\mathrm{m}$ 和地面平均引力加速度为 g_0 时，施加于导弹上的引力加速度大小可表为

$$g = g_0\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^2 \tag{4-2.4}$$

将引力加速度矢量 g 在发射坐标系各轴上进行分解(图 4-2)，可得

$$g_i = g\cos(\mathbf{r}, i) \qquad (i = x, y, z)$$

由图可知，其方向余弦关系

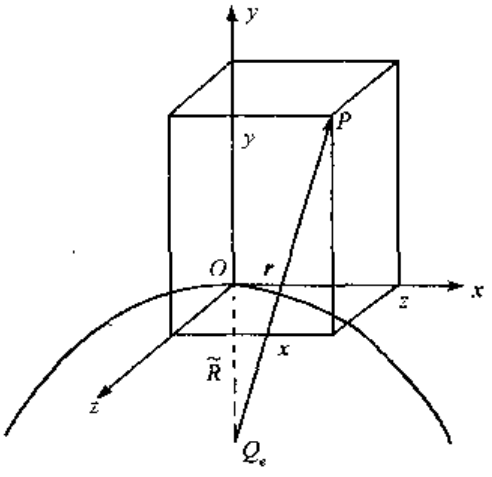


图 4-2

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\cos(\boldsymbol{r},x)=\dfrac{x}{r}\\ \cos(\boldsymbol{r},y)=\dfrac{y+\bar{R}}{r}\\ \cos(\boldsymbol{r},z)=\dfrac{z}{r}\end{cases}\tag{4-2.5}$$

于是

$$\begin{cases}g_x=-\dfrac{fM}{r^2}\dfrac{x}{r}=-g\dfrac{x}{r}\\ g_y=-\dfrac{fM}{r^2}\dfrac{y+\bar{R}}{r}=-g\dfrac{y+\bar{R}}{r}\\ g_z=-\dfrac{fM}{r^2}\dfrac{z}{r}=-g\dfrac{z}{r}\end{cases}\tag{4-2.6}$$

式中

$$\begin{cases}g=\dfrac{fM}{r^2}=g_0\left(\dfrac{\bar{R}}{r}\right)^2\\ r=\sqrt{x^2+(\bar{R}+y)^2+z^2}\end{cases}$$

显然，只要知道导弹质心相对发射坐标系之坐标(x,y,z)，应用上式便可很方便地求出导弹引力加速度在发射坐标系各轴上的投影。

4.2.2 地球为正常椭球体时的引力位及其引力

确定正常椭球体外部任一单位质量质点引力位的方法很多，其中最常用的方法就是球谐函数展开法。应用该方法计算引力的基本思想在于：将真实地球引力位函数U展成球谐函数级数，并取其展式中的前三项作为正常椭球体对应的正常引力位，然后应用位函数性质求出地球为正常椭球体时的引力。

很显然，正常引力位虽然不完全是真实地球引力位，但两者的差别也仅仅是由于球谐函数展开式中之高阶项而引起的。因此，正常椭球体引力位不仅能够比较精确地反映真实地球引力位，而且其数学模型也比较简单。

应用球谐函数表示的地球外部任一单位质量质点$P(r,\varphi_s,\gamma_s)$的引力位U为(图4-3)

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}U_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\left[A_nP_n(\sin\varphi_S)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda_s+B_{nm}\sin m\lambda_s)P_{nm}(\sin\varphi_s)\right]\tag{4-2.7}$$

式中

r、φ_S、λ_S分别为地球外部任一单位质量质点(如单位质量导弹)的地心距离、地心纬度和地心经度；

A_n、A_{nm}、B_{nm}为球谐函数系数(或可托克斯常数)；

$$P_n(\sin\varphi_S)=P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(\cos^2\theta-1)^n}{\mathrm{d}(\cos\theta)^n}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

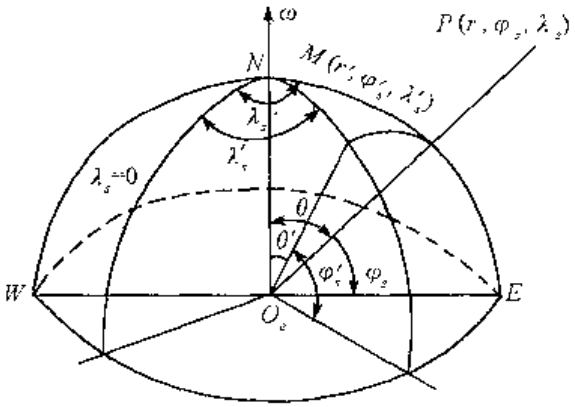


图 4－3

为勒让德主球谐函数(或带球函数)；

$$P_{nm}(\sin\varphi_S) = P_{nm}(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta)^m}$$

为缔合勒让德(或伴随)函数；

m、n 分别表示勒让德函数的阶数和级数；

$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_S$ 为 r 与地球自转轴间的极角。

在引力位函数展开式中，选取项数的多少直接反映出其计算精度的高低。选取项数越多，引力位的计算精度越高，但其计算量也越大；相反，选取项数越少时，虽然计算量减少了，但却不能较正确地反映地球引力位的客观实际。根据计算和实践经验，常取 $n = 2$ (即取位函数展开式中前三项之和)时之位函数作为正常椭球体引力位函数，用 $\bar{U}$ 表示。因而由(4—2.7)式可得

$$\bar{U} = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{r^{n+1}}[A_n P_n(\sin\varphi_S) + \sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda_S + B_{nm}\sin m\lambda_S)P_{nm}(\sin\varphi_S)]$$

当把真实地球质量 M 作为正常椭球体质量，并取地心和地球主惯性轴分别为坐标原点和坐标轴时，则

$$A_0 = fM$$

$$A_1 = A_{11} = B_{11} = A_{21} = B_{21} = A_{22} = B_{22} = 0$$

故有

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{fM}{r} + \frac{1}{r^3}[A_2(\frac{3}{2}\sin^2\varphi_S - \frac{1}{2})] \\ &= \frac{fM}{r}[1 + \frac{A_2}{fMa^2}(\frac{a}{r})^2 P_2(\sin\varphi_S)] \\ &= \frac{fM}{r}[1 - J_2(\frac{a}{r})^2 P_2(\sin\varphi_S)] \qquad (4-2.8)\end{aligned}$$

其中

$$P_2(\sin\varphi_S) = \frac{1}{2}(3\sin^2\varphi_S - 1) \qquad (4-2.9)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为二阶勒让德带球谐函数；

$J_2 = -\frac{\Lambda_2}{fMa^2}$为二阶主球谐函数系数(或地球形状动力学系数)，可由卫星测量获得；

a 为地球赤道半径。

当 $J_2 = 0$ 时，则(4－2.8)式为

$$\bar{U} = \frac{fM}{r}$$

显然，上式正是地球为圆球体时的引力位函数。因此，(4－2.8)式右端第二项即为由于考虑地球扁率而引入的引力位修正项。计算表明，该修正项为一小量，这恰好反映了真实地球是一个近似的圆球体这一事实。

根据位函数特性，很容易求出地球引力。为计算方便，先计算出引力在北东坐标系[n](参见附录2)各轴上的分量和在 $\boldsymbol{\omega}$ 及 r 方向上的分量，然后再求出引力在发射坐标系各轴上的分量。

由于"引力位对任一方向的偏导数等于引力在该方向的分量"，故正常引力在北东坐标系各轴上的分量为

$$\begin{cases} g_r = \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial r} \\ g_e = \dfrac{1}{r\cos\varphi_S}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial \lambda_S} \\ g_n = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi_S} \end{cases} \tag{4－2.10}$$

由于大地子午面将质量分布均匀的正常椭球体分成对称的两部分，因此地球外部任一质点的引力矢量 $\boldsymbol{g}$ 始终位于该点对应的大地子午面内，故分量

$$g_e = \frac{1}{r\cos\varphi_S}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \lambda_S} = 0$$

将(4－2.8)式分别对 r、λ_S 求偏导数，并代入(4－2.10)式，则得均质正常椭球体外部空间任一单位质量质点的正常引力分量

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2}\left[1 - 3J_2\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi_S)\right] \\ g_n = -\dfrac{fM}{r^2}J_2\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_S}P_2(\sin\varphi_S) \end{cases} \tag{4－2.11}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}P_2(\sin\varphi_S)}{\mathrm{d}\varphi_S} = \frac{3}{2}\sin 2\varphi_S \tag{4－2.12}$$

将(4－2.9)式和(4－2.12)式代入(4－2.11)式，且令

$$J = \frac{3}{2}J_2 = 1.623945 \times 10^{-3}$$

于是

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2}[1 + J(\dfrac{a}{r})^2(1 - 3\sin^2\varphi_S)] \\ g_n = -\dfrac{fM}{r^2}J(\dfrac{a}{r})^2\sin 2\varphi_S \end{cases} \tag{4-2.13}$$

若令 g 与导弹质心的地心矢径间的夹角为 μ_1，则由图 4-4 不难得出引力与其地心矢径的夹角和引力的大小

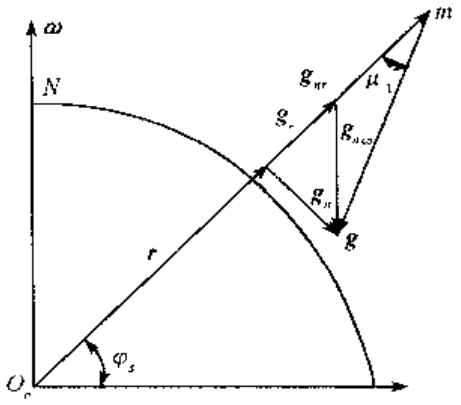


图 4-4

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\mu_1 = \dfrac{g_n}{g_r} \\ g = g_r/\cos\mu_1 \end{cases} \tag{4-2.14}$$

由于地球一阶扁率系数 J 较小，μ_1 值也较小，因此可近似认为 $\mathrm{tg}\mu_1 \approx \mu_1$，$\cos\mu_1 \approx 1$，又因为

$$J(\frac{a}{r})^2(1 - 3\sin^2\varphi_S) \ll 1$$

故(4-2.14)式可进一步简化为

$$\begin{cases} \mu_1 = J(\dfrac{a}{r})^2\sin 2\varphi_S \\ g \approx g_r = -\dfrac{fM}{r^2}[1 - J(\dfrac{a}{r})^2(3\sin^2\varphi_S - 1)] \end{cases} \tag{4-2.15}$$

在实际计算中，常常采用沿径向 r 和地球自转轴 ω 方向上的引力分量，因此将 g_r 和 g_n 沿 r 及 ω 方向进行分解。由图 4-4 可知，因 g_r 沿 r 方向、所以 g_n 在 r 及 ω 方向上的分量为

$$\begin{cases} g_{nr} = |g_n|\mathrm{tg}\varphi_S \\ g_{n\omega} = |g_n|/\cos\varphi_S \end{cases} \tag{4-2.16}$$

根据矢量合成定理，则 g 在 r 及 ω 方向上的总分量分别为

$$\begin{cases} g_{r总} = g_r - g_{nr} \\ g_{\omega总} = g_{n\omega} \end{cases} \tag{4-2.17}$$

即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} g_{r总} = -\dfrac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\varphi_S)\right] \\ g_{\omega总} = -2\dfrac{fM}{r^2}J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sin\varphi_S \end{cases} \tag{4-2.18}$$

略去注脚“总”，且引入地球扁率系数

$$\mu = fMa^2J = 26.33281 \times 10^{24} \tag{4-2.19}$$

于是

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2} + \dfrac{\mu}{r^4}(5\sin^2\varphi_S - 1) \\ g_\omega = -2\dfrac{\mu}{r^4}\sin\varphi_S \end{cases} \tag{4-2.20}$$

应用方向余弦定理，将 $\boldsymbol{g}_g$ 及 $\boldsymbol{g}_\omega$ 分别投影于发射坐标系各轴上，其形式为

$$g_i = g_r\cos(r,i) + g_\omega\cos(\omega,i) \qquad (i = x,y,z) \tag{4-2.21}$$

因各方向余弦

$$\begin{cases} \cos(r,i) = \dfrac{i + R_{0i}}{r} \\ \cos(\omega,i) = \dfrac{\omega_i}{\omega} \end{cases} \tag{4-2.22}$$

故

$$g_i = g_r\frac{i + R_{0i}}{r} + g_\omega\frac{\omega_i}{\omega} \qquad (i = x,y,z) \tag{4-2.23}$$

式中

R_{oi} 为发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_o$ 在发射坐标系各轴上的投影；

ω_i 为地球自转角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 在发射坐标系各轴上的投影。

这里需要提一下地球重力的概念，重力即物体的重量，它与地球引力是两个不同的物理概念。重力除含有地球引力外，还包括由于地球旋转而产生的离心惯性力，因此，重力即为地球引力和离心惯性力矢量和(图 4-5)。

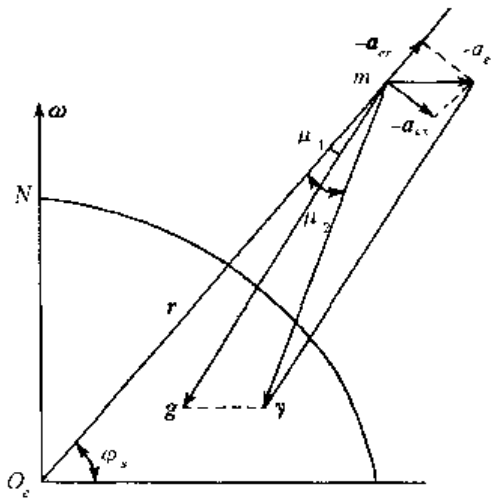


图 4-5

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

应用类似于上述的推导方法，可得正常重力在北东坐标系各轴上的分量

$$\begin{cases}\gamma_r = -\dfrac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2(1 - 3\sin^2\varphi_S) - q\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\cos^2\varphi_S\right] \\ \gamma_n = -\dfrac{fM}{r^2}\left[J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \dfrac{1}{2}q\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\right]\sin 2\varphi_S\end{cases} \tag{4-2.24}$$

其中

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM} = 3.461396 \times 10^{-3}$$

为赤道上一点的离心惯性力与重力之比值。

重力大小 γ 和重力线与地心矢径 r 间的夹角 μ_2 分别为

$$\begin{cases}\gamma = \dfrac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2(1 - 3\sin^2\varphi_S) - q\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\cos^2\varphi_S\right] \\ \mu_2 = \left[J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \dfrac{1}{2}q\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\right]\sin 2\varphi_S\end{cases} \tag{4-2.25}$$

对地面上的一点，由于

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 \approx \left(\frac{a}{r}\right)^3 \approx 1$$

$$\tilde{\alpha} = J + \frac{1}{2}q = \frac{1}{298.257}$$

故 μ_2 可表示为

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}\sin 2\varphi_S \tag{4-2.26}$$

因此地面重力大小和地面点的地心距离则分别为

$$\begin{cases}\gamma_0 = \dfrac{fM}{R^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a}{R}\right)^2(1 - 3\sin^2\varphi_S) - q\left(\dfrac{R}{a}\right)^3\cos^2\varphi_S\right] \\ R = a(1 - \tilde{\alpha})\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\varphi_S + (1 - \tilde{\alpha})^2\cos^2\varphi_S}}\end{cases} \tag{4-2.27}$$

根据图 4-5 和(4-2.26)式大地纬度 B，地心纬度 φ_s 和 μ_2 间的关系式为

$$B = \varphi_S + \mu_2 = \varphi_S + \tilde{\alpha}\sin 2\varphi_S \tag{4-2.28}$$

当地面点的大地纬度 $B = 45°32'33''$ 时，则由(4-2.27)和(4-2.28)式可得对应点的地心纬度 φ_s、地心距离 R 以及重力 γ_0，即

$$\begin{cases}\varphi_S = 45°21'0.5'' \\ R = 6367289.943\text{m} \\ \gamma_0 = 9.806673\text{m/s}^2\end{cases}$$

国际上常常将应用赫尔默特正常重力公式

$$\gamma = 9.78030(1 + 0.005302\sin^2 B - 0.000007\sin^2 2B)$$

计算出的大地纬度为 $B = 45°32'33''$ 处的重力加速度定义为质量与重量的换算系数，用 $\tilde{g}_0$ 表示，其值为

$$\tilde{g}_0 = 9.80665\text{m/s}^2$$

以上公式中的地心纬度 φ_s，可应用(2-2.22)式计算，亦可采用下面给出的公式进行

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

计算。

设导弹某瞬时空间位置所对应的地心纬度为 φ_s、地心矢径为 $\boldsymbol{r}$ 以及它在发射坐标系内的坐标(x,y,z),由图 4-6 则得

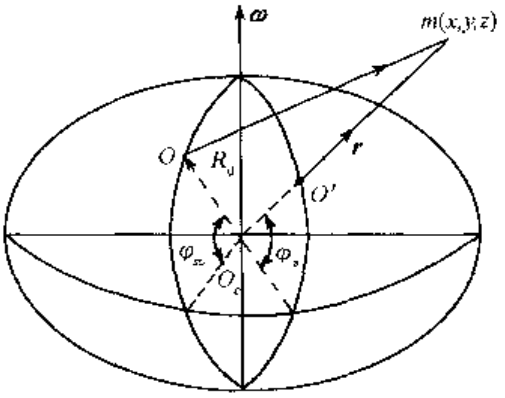


图 4-6

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}=r\omega\sin\varphi_s \tag{4-2.29}$$

由于

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}=(R_{0x}+x)\omega_x+(R_{0y}+y)\omega_y+(R_{0z}+z)\omega_z \tag{4-2.30}$$

于是

$$\varphi_S=\sin^{-1}\left(\frac{x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z}{r\omega}+\frac{R_{0b}}{r}\right) \tag{4-2.31}$$

其中

$$R_{0b}=\frac{R_{0x}\omega_x+R_{0y}\omega_y+R_{0z}\omega_z}{\omega}=R_0\sin\varphi_{S0} \tag{4-2.32}$$

$R_{0i}(i=x,y,z)$为发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 在发射坐标系各轴上的投影;

$\omega_i(i=x,y,z)$为地球自转角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 在发射坐标系各轴上的投影;

R_0、φ_{S0}分别为发射点至地心的距离和地心纬度。

§4.3 扰动引力的计算

在§ 4.2 中,我们已经分别讨论了地球为圆球体和正常椭球体时的引力位及引力的计算方法。这种传统的计算方法适用于射程不大和射击精度要求不高的中近程弹道导弹的弹道计算。随着导弹射程的增加和射击精度的不断提高,对地球引力计算精度的要求也越来越高,那种传统的计算方法也就越来越不适应,因而必须考虑真实地球形状与正常椭球体形状不完全一致以及真实地球质量分布不均匀(前者称为几何学影响,而后者则称为动力学影响)所造成的实际引力与正常引力间的差别,即扰动引力。

设地球外部空间任一单位质量质点的实际引力为 $\boldsymbol{g}$、引力位为 U、重力位为 W、离心力位为 Q,而同一点的正常引力位为 $\overline{U}$、正常引力为 $\overline{\boldsymbol{g}}$、正常重力位为 $\overline{W}$、正常离心力位为 $\overline{Q}$ 以及该点的扰动引力位和扰动引力分别为 T 及 $\delta\boldsymbol{g}$ 时,则由扰动引力概念可得各参数间

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的关系

$$\begin{cases} U = \bar{U} + T \\ \bar{W} = \bar{U} + Q \\ W = U + Q \\ \boldsymbol{g} = \bar{\boldsymbol{g}} + \delta \boldsymbol{g} \end{cases} \tag{4-3.1}$$

相对引力位而言，由于考虑到实际引力场本身就很接近于正常引力场，所以离心力位是个小量，而且可近似认为同一点处的实际离心力位与正常离心力位相等。这样，(4-3.1)式可表为

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} - \bar{\boldsymbol{g}} \\ T = W - \bar{W} = U - \bar{U} \end{cases} \tag{4-3.2}$$

即扰动重力位等于扰动引力位，扰动引力等于实际引力与正常引力之差。

根据引力位函数特性，若引力在任一直角坐标系 $oxyz$ 各轴上的投影为

$$\begin{cases} g_i = \dfrac{\partial U}{\partial i} \\ \bar{g}_i = \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial i} \end{cases} \quad (i = x, y, z) \tag{4-3.3}$$

则扰动引力 $\delta \boldsymbol{g}$ 在同一坐标系对应轴上的投影即为

$$\delta g_i = \frac{\partial T}{\partial i} \quad (i = x, y, z) \tag{4-3.4}$$

由此得出结论：扰动引力位对坐标系任一坐标轴方向的偏导数等于扰动引力在同一坐标系相应坐标方向上的分量。

研究地球外部空间扰动引力的方法很多。根据近年来国内外对“地球形状及引力场研究”工作的开展情况及可能提供的重力、天文等资料，目前我们常采用的计算方法有四种：梯度法、司托克斯积分法、球谐函数展开法和点质量法。下面对上述方法分别进行讨论。

4.3.1 梯度法

所谓梯度法，就是根据发射点的扰动引力及其梯度来计算发射点附近区域不大范围内的地球外部空间点的扰动引力的方法。在这种方法中，由于要用到阵地坐标系的概念，因此我们首先对它予以介绍。

1. 阵地坐标系$[d](ox_dy_dz_d)$

该坐标系原点取于发射点；oz_d 轴沿发射点铅垂线，向上为正(即与发射坐标系之 oy 轴一致)；ox_d 轴位于发射点水平面内，且指向正东方向；oy_d 轴与 ox_d、oz_d 轴构成右手直角坐标系(图 4-7)，显然，oy_d 轴指向正北方向。

2. 扰动引力位及扰动引力

众所周知，地球对其外部空间任一单位质量质点的引力 $\boldsymbol{g}$ 是位置坐标的函数，用阵地坐标表示时，则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(x_d, y_d, z_d) \\ g_i = g_i(x_d, y_d, z_d) \end{cases} \quad (i = x, y, z) \tag{4-3.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

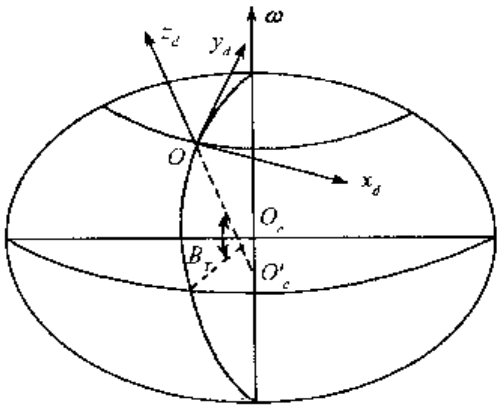


图 4-7

将上式在发射点附近展成台劳级数，且取一次项，有

$$g_i = g_{i0} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial g_i}{\partial j} j_d \tag{4-3.6}$$

其中

g_{i0}表示发射点实际引力在阵地坐标系各轴上的分量；

$\frac{\partial g_i}{\partial j}$为发射点处实际引力水平分量$g_x, g_y$及垂直分量$g_z$对阵地坐标系各轴的梯度；

j_d为空间点的阵地坐标系之坐标。

类似地，在正常引力场中，同一点的正常引力$\bar{g}$在阵地坐标系中的表示式为

$$\bar{g}_i = \bar{g}_{i0} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial j} j_d \tag{4-3.7}$$

式中

$\bar{g}_{i0}$为发射点处正常引力在阵地坐标系各轴上的分量；

$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial j}$为发射点处正常引力的水平分量和垂直分量对阵地坐标系各轴的梯度。

根据(4-3.6)及(4-3.7)式，且令

$$\begin{cases} \delta_{id} = g_i - \bar{g}_i = \delta g_i \\ \delta_{id0} = g_{i0} - \bar{g}_{i0} \end{cases} \tag{4-3.8}$$

则得

$$\delta_{id} = \delta_{id0} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \delta_i}{\partial j} j_d \tag{4-3.9}$$

其中

$\delta_{id}(i = x, y, z)$为任一空间点处的扰动引力在阵地坐标系各轴上的分量；

δ_{id0}为发射点处的扰动引力在阵地坐标系各轴上的分量；

$\frac{\partial \delta_i}{\partial j}(j = x, y, z)$为发射点处扰动引力的水平和垂直分量对阵地坐标系各轴的水平梯度和垂直梯度。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为进一步简化上式，将水平梯度和垂直梯度作如下变换。

根据(4－3.4)和(4－3.8)式，则有

$$\delta_i = \frac{\partial T}{\partial i} \qquad (i = x, y, z) \tag{4-3.10}$$

这样，(4－3.9)式中之扰动引力分量水平和垂直梯度可变换为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial \delta_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta_x}{\partial z} = \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta_y}{\partial z} = \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} \end{cases} \tag{4-3.11}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial \delta_z}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{cases} \tag{4-3.12}$$

由于引力位函数 U 满足拉普拉斯方程 $\Delta U = 0$(即 U 为拉普拉斯方程的解)，因此 U 为调和函数。同样可以证明，扰动引力位函数 T 也是调和函数，故有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4-3.13}$$

于是

$$\frac{\partial \delta_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y}\right) \tag{4-3.14}$$

因此，(4－3.9)式可表为

$$\begin{cases} \delta_{xd} = \delta_{xd0} + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} x_d + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} y_d + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial z} z_d \\ \delta_{yd} = \delta_{yd0} + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} x_d + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} y_d + \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} z_d \\ \delta_{zd} = \delta_{zd0} + \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} x_d + \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} y_d - \left(\dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y}\right) z_d \end{cases} \tag{4-3.15}$$

亦可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta_{xd} \\ \delta_{yd} \\ \delta_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{xd0} \\ \delta_{yd0} \\ \delta_{zd0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} & \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} & \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} & \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} & \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} & \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} & -\left(\dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} \tag{4-3.16}$$

上式即为计算空间扰动引力的梯度法公式。由此看出，只要给定发射点的扰动引力

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

分量 δ_{id}。$(i=x,y,z)$及其水平梯度$\frac{\partial\delta_i}{\partial j}(j=x,y)$和导弹位置相对阵地坐标系之坐标 i_d，应用(4-3.16)式便可很方便地计算出相应位置的扰动引力分量 δ_{id}。从这个意义上说，该方法具有数学模型简单和计算方便的优点。至于发射点处的扰动引力分量及其水平梯度如何确定，则是下面需要进一步研究的问题。

3. 发射点扰动引力分量的计算

由(4-3.2)式可知，由于空间同一点处的扰动引力位与其扰动重力位相等，因此，该点处的扰动引力就等于其扰动重力，即

$$\begin{cases}|\delta\mathbf{g}|=|\delta\gamma|\\ \delta_{id}=\delta\gamma_{id}\end{cases}$$

式中

$\delta\gamma_{id}=\gamma_{id}-\bar{\gamma}_{id}$为扰动重力$\delta\gamma$在阵地坐标系各轴上的分量；

γ_{id}、$\bar{\gamma}_{id}$分别为实际重力γ及正常重力$\bar{\gamma}$在阵地坐标系各轴上的分量。

对于发射点，显然有

$$\delta_{id0}=\gamma_{i0}-\bar{\gamma}_{i0} \tag{4-3.17}$$

γ_{i0}、$\bar{\gamma}_{i0}(i=x,y,z)$分别为发射点处实际重力和正常重力在阵地坐标系各轴上的分量。

一般情况下，发射点处的实际重力值是通过实测获得的。若实测重力值为 γ_0，则

$$\begin{cases}\gamma_{x0}=\gamma_{y0}=0\\ \gamma_{z0}=-\gamma_0\end{cases} \tag{4-3.18}$$

而该点处的正常重力值 $\bar{\gamma}_0$，可利用正常重力计算式(4-2.24)来确定，即

$$\begin{cases}\bar{\gamma}_{r0}=-\dfrac{fM}{R_0^2}\left[1+J\left(\dfrac{a}{R_0}\right)^2(1-3\sin^2\varphi_{S0})-q\left(\dfrac{R_0}{a}\right)^3\cos^2\varphi_{S0}\right]\\ \bar{\gamma}_{n0}=-\dfrac{fM}{R_0^2}\left[J\left(\dfrac{a}{R_0}\right)^2+\dfrac{1}{2}q\left(\dfrac{R_0}{a}\right)^3\right]\sin 2\varphi_{S0}\\ \bar{\gamma}_{e0}=0\end{cases} \tag{4-3.19}$$

根据阵地坐标系与北东坐标系间的关系，发射点处的正常重力 $\bar{\gamma}_0$ 在阵地坐标系各轴上的分量为

$$\begin{cases}\bar{\gamma}_{x0}=(-\bar{\gamma}_{n0}\cos\varphi_{S0}+\bar{\gamma}_{n0}\sin\varphi_{S0})\sin(\lambda_T-\lambda_{S0})\\ \bar{\gamma}_{y0}=-\bar{\gamma}_{n0}\sin(B_T-\varphi_{S0})+\bar{\gamma}_{n0}\cos\varphi(B_T-\varphi_{S0})\\ \bar{\gamma}_{z0}=\bar{\gamma}_{r0}\cos(B_T-\varphi_{S0})+\bar{\gamma}_{n0}\sin\varphi(B_T-\varphi_{S0})\end{cases} \tag{4-3.20}$$

式中 B_T、λ_T 分别为发射点天文纬度和经度；λ_{S0}、φ_{S0}分别为发射点的地心经度和纬度。

这样，当已知发射点重力实测值及正常地球椭球体的基本参数(a、fM 及 J_2)时，只要将(4-3.18)~(4-3.20)式代入(4-3.17)式，便可确定出发射点处的扰动引力 $\delta_{id0}(i=x,y,z)$。

4. 发射点处扰动引力分量的水平梯度

在应用梯度法计算发射点附近区域不大范围内的空间任一单位质量质点的扰动引力

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

时，还应预先知道其式中的扰动引力分量的水平梯度值$\frac{\partial \delta_i}{\partial j}(i=x,y,z;j=x,y)$，而这些值的获得则应以空间点实测重力资料为依据。然而，在工程应用中，在没有这些所需要的重力实测资料的情况下，可以发射点附近 n 个方向上的 n 个地面点重力实测值为依据，应用最小二乘法原理所确定的扰动引力分量的水平梯度值来代替。其具体计算方法和步骤如下：

(1)确定发射点附近各地面点的天文经纬度、大地经纬度和重力值

在发射点周围不大区域内(如 2km 左右)的 n 个方向上，选取 n 个地面点同时进行天文、大地和重力测量，以获得这些点的天文经纬度(B_{Ti}、λ_{Ti})、大地经纬度(L_i、B_i)、高程(h_i)以及重力值 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$。

(2)计算各地面点在阵地坐标系中之坐标值

如果发射点地心距离为 r_0，发射点的大地坐标为(B_0、L_0、h_0)，发射点周围第 i 个地面点至地心的距离为 r_i，那么第 i 个地面点的地心距离 r_i 在阵地坐标系之坐标可表为

$$\begin{cases} x_{di} = r_i \sin(L_i - L_0)\cos\varphi_{S0} \\ y_{di} = r_i \sin(B_i - B_0) \\ z_{di} = r_i - r_0 \end{cases} \tag{4-3.21}$$

其中

$$\begin{cases} r_i = R_i + h_i \\ r_0 = R_0 + h_0 \end{cases}$$

而 R_0、R_i 分别为发射点和第 i 个地面点对应于正常椭球体面上点的地心距离。

由于选取的 i 个点均在发射点周围不大范围内，可近似认为 $R_i = R_0$，$\sin(B_i - B_0) \approx B_i - B_0$ 及 $\sin(L_i - L_0) \approx L_i - L_0$，因此

$$\begin{cases} x_{di} = r_0(L_i - L_0)\cos\varphi_{S0} \\ y_{di} = r_0(B_i - B_0) \\ z_{di} = h_i - h_0 \end{cases} \tag{4-3.22}$$

(3)计算各地面点的扰动引力分量

在 i 点，如果天文经纬度为(λ_{Ti}，B_{Ti})，重力实测值为 γ_i，那么 γ_i 在阵地坐标系各轴上的分量类似于(4-3.21)式表为(注：为书写方便，略去注脚"d"，下同)

$$\begin{cases} \gamma_{xi} = \gamma_i \cos B_{Ti} \sin(\lambda_T - \lambda_{Ti}) \\ \gamma_{yi} = \gamma_i \sin(B_T - B_{Ti}) \\ \gamma_{zi} = -\gamma_i \end{cases} \tag{4-3.23}$$

而第 i 点正常重力在阵地坐标系中之分量 $\bar{\gamma}_{ji}(j=x,y,z)$，可由(4-3.20)式求得，即

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{xi} = (-\bar{\gamma}_{ni}\cos\varphi_{Si} + \bar{\gamma}_{ui}\sin\varphi_{Si})\sin(\lambda_{Ti} - \lambda_{Si}) \\ \bar{\gamma}_{yi} = -\bar{\gamma}_{ni}\sin(B_{Ti} - \varphi_{Si}) + \bar{\gamma}_{ui}\cos(B_{Ti} - \varphi_{Si}) \\ \bar{\gamma}_{zi} = \bar{\gamma}_{ni}\cos(B_{Ti} - \varphi_{Si}) + \bar{\gamma}_{ui}\sin(B_{Ti} - \varphi_{Si}) \end{cases} \tag{4-3.24}$$

其中 φ_{si}、λ_{si} 分别为第 i 地面点的地心纬度和经度。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

这样，地面上第 i 点的扰动引力分量

$$\delta_{ji} = \gamma_{ji} - \bar{\gamma}_{ji} \qquad (j = x, y, z) \tag{4-3.25}$$

即可求出。于是，第 i 地面点的扰动引力分量计算值与其扰动重力实测值之差即可表成

$$\begin{cases} u_i = \delta_{x0} + \sum \dfrac{\partial \delta_x}{\partial j} j_i - \delta_{xi} \\ v_i = \delta_{y0} + \sum \dfrac{\partial \delta_y}{\partial j} j_i - \delta_{yi} \qquad (j = x, y, z) \\ w_i = \delta_{z0} + \sum \dfrac{\partial \delta_z}{\partial j} j_i - \delta_{zi} \end{cases} \tag{4-3.26}$$

当顾及关系式(4-3.11)式和(4-3.13)式时，上式可改写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} x_i + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} y_i + \dfrac{\partial \delta_x}{\partial z} z_i + (\delta_{x0} - \delta_{xi}) = u_i \\ \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} x_i + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} y_i + \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} z_i + (\delta_{y0} - \delta_{yi}) = v_i \\ \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} x_i + \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} y_i - \left(\dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y}\right) z_i + (\delta_{z0} - \delta_{zi}) = w_i \end{cases} \tag{4-3.27}$$

应用最小二乘法原理

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) = \min$$

则得扰动引力分量水平梯度的正则方程组

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ n_{21} & \cdot & & & \\ n_{31} & & \cdot & & \\ n_{41} & & & \cdot & \\ n_{51} & & & & n_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \delta_z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} \tag{4-3.28}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
n_{11} = n_{33} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + z_i^2) \\
n_{22} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) \\
n_{44} = n_{55} = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 + z_i^2) \\
n_{13} = n_{31} = n_{45} = n_{54} = 0 \\
n_{12} = n_{21} = n_{24} = n_{42} = n_{35} = n_{53} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
n_{25} = n_{52} = -n_{34} = -n_{43} = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \\
n_{14} = n_{41} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \\
B_1 = \sum_{i=1}^{n}[(\delta_{xi} - \delta_{x0})y_i - (\delta_{zi} - \delta_{z0})z_i] \\
B_2 = \sum_{i=1}^{n}[(\delta_{xi} - \delta_{x0})y_i + (\delta_{yi} - \delta_{y0})x_i] \\
B_3 = \sum_{i=1}^{n}[(\delta_{zi} - \delta_{z0})z_i + (\delta_{xi} - \delta_{x0})x_i] \\
B_4 = \sum_{i=1}^{n}[(\delta_{yi} - \delta_{y0})y_i - (\delta_{zi} - \delta_{z0})z_i] \\
B_5 = \sum_{i=1}^{n}[(\delta_{yi} - \delta_{y0})z_i + (\delta_{zi} - \delta_{z0})y_i]
\end{cases}
\tag{4-3.29}
$$

值得提出的是，n 值是任意选取的正整数，一般来讲，n 值越小，扰动引力分量的水平梯度计算精度就越低；反之，n 值越大，计算精度也就越高，但计算工作量也相应地增加。因此，在实际弹道计算中，常用发射点周围 2km 区域内的八个方向上，选用八个地面点实测值来估算发射点扰动引力分量的水平梯度值。

5. 阵地坐标系与发射坐标系间的关系

前已述及，描述弹道导弹运动规律的方程组通常是以发射坐标系为参考系建立的，而要估量在阵地坐标系内描述的扰动引力对导弹飞行的影响，就必须将其转换到发射坐标系内。关于阵地坐标与发射坐标系间的坐标变换关系式，可根据它们的定义和图 4－8 导出，即

$$
[x_d] = \boldsymbol{B}_d^g [x] \tag{4-3.30}
$$

其中

$$
\boldsymbol{B}_d^g = \begin{bmatrix} \sin A_T & 0 & \cos A_T \\ \cos A_T & 0 & -\sin A_T \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-3.31}
$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

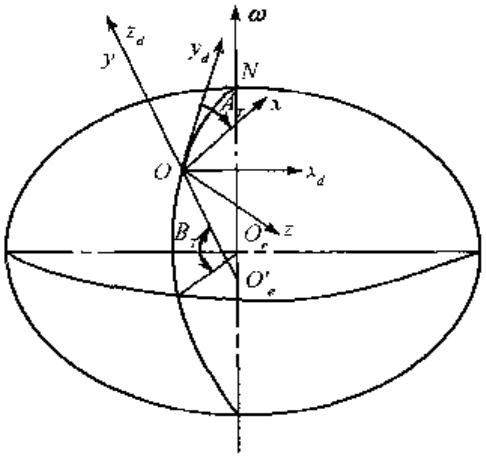


图 4－8

A_T 为发射点天文瞄准方位角。

由上看出，在工程应用中，当发射点的扰动引力分量及其水平梯度给定时，应用梯度法计算飞行导弹的扰动引力是比较方便的。但由于该方法的使用高度范围较小，而且计算精度也不很高，因而应用受到一定限制。如果发射点周围的地形面比较平坦，其应用高度范围可适当扩大，但一般也不宜超过 20km，否则将会引起大的计算误差。如果发射点周围的地形面严重起伏，那么这种方法就根本不适用了。

4.3.2 球谐函数展开法

因为地球引力位函数和扰动引力位函数均为调和函数，而调和函数则必然满足拉普拉斯方程 $\Delta U=0$（即 U 为拉普拉斯方程的解），因此应用球谐函数展开法计算地球外部空间任一单位质量质点的扰动引力的问题，就归结为求解以球坐标表示的拉普拉斯方程，从而得到以球函数表示的地球引力位函数和扰动引力位函数，并根据位函数特性求取地球扰动引力的问题。在讨论该方法的过程中，将会涉及到球函数、勒让德函数以及《地球重力学》课程中的许多概念，而这些并非本课程研究的范畴，因此就不加证明地直接引用了。

1. 扰动引力位

由(4－2.7)式给出的实际地球引力位函数为

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\left[A_nP_n(\sin\varphi_s)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda_S+B_{nm}\sin m\lambda_S)P_{nm}(\sin\varphi_S)\right] \tag{4-3.32}$$

当坐标原点选取于地心时，则有

$$\begin{aligned}U=&\frac{fM}{r}\left[1+\frac{A_2}{fMa^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_2(\sin\varphi_S)\right]+\frac{1}{r^3}\left[(A_{21}\cos\lambda_S\right.\\&+B_{21}\sin\lambda_S)P_{21}(\sin\varphi_S)+(A_{22}\cos2\lambda_S+B_{22}\sin2\lambda_S)\\&P_{22}(\sin\varphi_S)\left.\right]+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\left[A_nP_n(\sin\varphi_S)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda_S\right.\\&\left.+B_{nm}\sin m\lambda_S)P_{nm}(\sin\varphi_S)\right]\end{aligned} \tag{4-3.33}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

而正常引力位函数(4-2.8)式为

$$\bar{U}=\frac{fM}{r}\left[1+\frac{A_2}{fMa^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi_S)\right]$$

则地球扰动引力位函数为

$$\begin{aligned}T &= U-\bar{U}\\ &= \frac{1}{r^3}\left[(A_{21}\cos\lambda_S+B_{21}\sin\lambda_S)P_{21}(\sin\varphi_S)\right.\\ &\quad \left.+(A_{22}\cos 2\lambda_S+B_{22}\sin 2\lambda_S)P_{22}(\sin\varphi_S)\right]\\ &\quad +\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\left[A_nP_n(\sin\varphi_S)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda_S\right.\\ &\quad \left.+B_{nm}\sin m\lambda_S)P_{nm}(\sin\varphi_S)\right]\end{aligned}\qquad(4-3.34)$$

由于 $m=0$ 时

$$A_nP_n(\sin\varphi_S)=(A_{n0}\cos 0\lambda_S+B_{n0}\sin 0\lambda_S)P_{n0}(\sin\varphi_S)$$

于是

$$T=\frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(A'_{nm}\cos m\lambda_S+B'_{nm}\sin m\lambda_S)P_{nm}(\sin\varphi_S)\qquad(4-3.35)$$

式中

$$\begin{cases}A'_{nm}=\dfrac{A_{nm}}{fMa^n}\\ B'_{nm}=\dfrac{B_{nm}}{fMa^n}\\ A_{20}=0\end{cases}$$

由上式看出，n 值越大(即取项数越多)，其扰动引力位就越接近实际扰动引力位，但其计算工作量也随之而增加。

球谐函数值可以 φ_s 为引数从球谐函数表中查得。但由于不同阶、级的球谐函数值相差很大(例如，二阶一级球谐函数 P_{21} 的数量级为 $2\sqrt{2\pi}$，而八阶一级球函数 P_{81} 的数量级则为 $1500\sqrt{2\pi}$，两者竟相差达 700 倍；即使是同阶而不同级的球谐函数值也相差很大，如 P_{87} 比 P_{81} 也大 70 倍左右)，因此一般的球谐函数表所载数值均是经过正常化(或规格比)了的。所谓球函数的正常化就是使任一个阶、级的球函数的平方在单位球面上的平均值等于 1。

从正常化了的球谐函数值表可以看出，其函数值的数量级是很接近的，这样，即简化了计算，同时又便于使用。

用完全正常化的球谐函数 $\bar{P}(\sin\varphi_S)$ 表示的地球扰动引力位函数为

$$T=\frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda_S+S_{nm}\sin m\lambda_S)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\qquad(4-3.36)$$

其中

N 为完全正常化勒让德函数的最高阶级；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

C_{nm}、S_{nm}为完全正常化勒让德函数系数，可由数表查得，其与 A'_{nm}、B'_{nm}间的关系为

$$\begin{cases} C_{nm}=\sqrt{\dfrac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\dfrac{1}{k}}A'_{nm} \\ S_{nm}=\sqrt{\dfrac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\dfrac{1}{k}}B'_{nm} \end{cases} \tag{4-3.37}$$

k 为常数，当 $m=0$ 时，$k=1$；$m\neq 0$ 时，$k=2$；

$$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}kP_{nm}(\sin\varphi_S) \tag{4-3.38}$$

它的递推公式和导数公式分别为

$$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)=\begin{cases} 0 & n<m \\ \sqrt{\dfrac{2n+1}{2n}}\cos\varphi_S\bar{P}_{n-1,n-1}(\sin\varphi_S) & n=m \\ \sqrt{\dfrac{4n^2-1}{n^2-m^2}}\sin\varphi_S\bar{P}_{n-1,m}(\sin\varphi_S) & \\ -\sqrt{\dfrac{2n+1}{2n-3}\dfrac{(n-1)^2-m^3}{n^2-m^2}}\bar{P}_{n-2,m}(\sin\varphi_S) & n>m \end{cases} \tag{4-3.39}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{P}_{00}(\sin\varphi_S)=1 \\ P_{10}(\sin\varphi_S)=\sqrt{3}\sin\varphi_S \\ P_{11}(\sin\varphi_S)=\sqrt{3}\cos\varphi_S \end{cases} \tag{4-3.40}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_S}\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)=\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}(n^2-m^2)}\frac{1}{\cos\varphi_S}\bar{P}_{n-1,m}(\sin\varphi_S)-n\ \mathrm{tg}\varphi_S\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S) \tag{4-3.41}$$

2. 扰动引力

根据位函数特性，可得以北东坐标系表示的扰动引力各分量

$$\begin{cases} \delta g_r=\dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \delta g_e=\dfrac{1}{r\cos\varphi_S}\dfrac{\partial T}{\partial\lambda_S} \\ \delta g_n=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\varphi_S} \end{cases} \tag{4-3.42}$$

将(4-3.36)式分别对 r、λ_S 及 φ_S 求偏导数

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial r} = -\dfrac{fM}{r^2}\sum\limits_{n=2}^{N}(n+1)\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda_S + S_{nm}\sin m\lambda_S)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\\ \dfrac{\partial T}{\partial \lambda_S} = -\dfrac{fM}{r}\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}m(C_{nm}\sin m\lambda_S - S_{nm}\cos m\lambda_S)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\\ \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_S} = \dfrac{fM}{r}\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda_S + S_{nm}\sin m\lambda_S)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_S}\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\end{cases} \tag{4-3.43}$$

代入(4-3.42)式,于是得

$$\begin{cases}\delta g_r = -\dfrac{fM}{r^2}\sum\limits_{n=2}^{N}(n+1)\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda_S + S_{nm}\sin m\lambda_S)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\\ \delta g_e = -\dfrac{fM}{r^2\cos\varphi_S}\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}m(C_{nm}\sin m\lambda_S - S_{nm}\cos m\lambda_S)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\\ \delta g_n = \dfrac{fM}{r^2}\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n\sum\limits_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda_S + S_{nm}\sin m\lambda_S)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_S}\bar{P}_{nm}(\sin\varphi_S)\end{cases} \tag{4-3.44}$$

为便于在发射坐标系中建立弹道导弹运动方程,需将用北东坐标系描述的扰动引力分量转换到发射坐标系中去,而这两坐标系间的方向余弦关系式为(参见附录2)

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_g^n\begin{bmatrix}n\\ r\\ e\end{bmatrix} \tag{4-3.45}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_g^n = \begin{bmatrix}d_{11} & d_{21} & d_{31}\\ d_{12} & d_{22} & d_{23}\\ d_{13} & d_{23} & d_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\varphi_S\cos\lambda_S & \cos\varphi_S\cos\lambda_S & -\sin\lambda_S\\ -\sin\varphi_S\sin\lambda_S & \cos\varphi_S\sin\lambda_S & \cos\lambda_S\\ \cos\varphi_S & \sin\varphi_S & 0\end{bmatrix} \tag{4-3.46}$$

应用(4-3.45)式,便可求得扰动引力在发射坐标系各轴上的分量

$$[\delta g_x] = \boldsymbol{A}_g^n[\delta g_n] \tag{4-3.47}$$

从以上讨论看出,计算扰动引力的球谐函数展开法的计算精度和计算工作量与球谐函数阶数的取值有关。阶数 n 取值越大,扰动引力计算精度越高,但计算项数则随着 n 值的增大以平方 $(n+1)^2$ 的规律增加,因而计算工作量也增加。如取 $n=30$,则就需要计算 $(n+1)^2=961$ 个球谐函数,显然,这种方法的计算工作量是相当大的。

由于被略去的球谐函数 n 阶以上的各高阶项对低空扰动引力计算影响较大,而对高空扰动引力计算影响不显著,因此该方法一般只能在200~250km以上的高空使用。根据这种情况,球谐函数展开法只适用于远程弹道导弹的自由段飞行时的扰动引力计算。随着已知球谐函数阶数的不断增加,如从原来的最高阶为360阶,540阶,720阶和1080阶,发展到最高阶为2160阶的今天,应用球谐函数展开法计算空间扰动引力的适用范围也将随之向低空域扩大。

最后指出一点,由于(4-3.44)式中的勒让德函数系数 C_{nm} 及 S_{nm} 是以 10^{-6} 为单位列入数表中的,因此使用时应在(4-3.44)式右端乘以 10^{-6}。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

4.3.3 司托克斯积分方法

应用司托克斯积分方法计算地球外部空间扰动引力的问题，就是将用司托克斯积分公式表示的地球外部空间扰动引力位对任一方向求偏导数，以求其扰动引力在该方向上的分量。

由《地球重力学》可知，用司托克斯积分公式表示的地球为圆球体时的扰动引力位为

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} S(r,\psi)\Delta g_{\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{4-3.48}$$

其中

$$\begin{cases} S(r,\psi) = \dfrac{2}{\rho} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{3\rho}{r^2} - \dfrac{R\cos\psi}{r^2}\left(5 + 3\ln\dfrac{r - R\cos\psi + \rho}{2r}\right) \\ \rho = (r^2 + R^2 - 2rR\cos\psi)^{\frac{1}{2}} \\ \cos\psi = \sin\varphi_S\sin\varphi_S^* + \cos\varphi_S\cos\varphi_S^*\cos(\lambda_S - \lambda_S^*) \\ \Delta g_{\sigma} = g_0 - \bar{g}_0 \end{cases} \tag{4-3.49}$$

ρ 为球面上面积元 $d\sigma$ 到 P 点的距离，ψ 为面积元 $d\sigma$ 与 P 点间对应的地心极角，φ_s、λ_s 为 P 点的地心纬度和经度，φ_s^*、λ_s^* 为面积元 $d\sigma$ 的地心纬度和经度，函数 $S(r,\psi)$ 为广义司托克斯函数，Δg_{σ} 为球面重力异常值(图 4-9)。

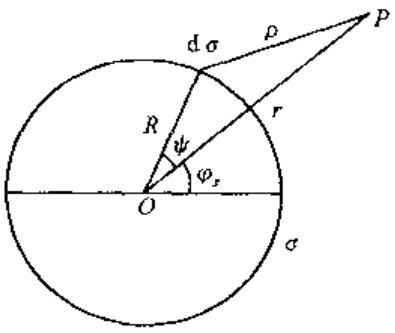


图 4-9

与球谐函数展开法相似，在已知地面重力异常 Δg_{σ} 的情况下，根据位函数特性，可导得地球外部空间任一点 $P(r,\varphi_s,\lambda_s)$ 的扰动引力在北东坐标系各轴方向上的分量

$$\begin{cases} \delta g_r = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial r}S(r,\psi)\Delta g_{\sigma}\mathrm{d}\sigma \\ \delta g_e = \dfrac{1}{4\pi r\cos\varphi_S}\displaystyle\int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial\lambda_S}S(r,\psi)\Delta g_{\sigma}\mathrm{d}\sigma \\ \delta g_n = \dfrac{1}{4\pi r}\displaystyle\int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial\varphi_S}S(r,\psi)\Delta g_{\sigma}\mathrm{d}\sigma \end{cases} \tag{4-3.50}$$

令

$$\begin{cases} S_1(r,\psi) = \dfrac{\partial}{\partial r}S(r,\psi) \\ S_2(r,\psi) = \dfrac{1}{r\cos\varphi_S}\dfrac{\partial}{\partial\lambda_S}S(r,\psi) \\ S_3(r,\psi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_S}S(r,\psi) \end{cases} \tag{4-3.51}$$

且顾及

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}S(r,\psi)=\dfrac{6\rho}{r^3}-\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r^2-R^2}{r\rho^3}-\dfrac{4}{\rho r}+\dfrac{R\cos\psi}{r^3}\left(13+6\ln\dfrac{r-R\cos\psi+\rho}{2r}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_S}S(r,\psi)=\dfrac{\partial S(r,\psi)}{\partial\cos\psi}\dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\lambda_S}\\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi_S}S(r,\psi)=\dfrac{\partial S(r,\psi)}{\partial\cos\psi}\dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi_S}\end{cases}\tag{4-3.52}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(r,\psi)}{\partial\cos\psi}=\dfrac{2rR}{\rho^3}+\dfrac{6R}{r\rho}-\dfrac{8R}{r^2}-\dfrac{3R}{r^2}\left(\dfrac{r-R\cos\psi-\rho}{\rho\sin^2\psi}+\ln\dfrac{r-R\cos\psi+\rho}{2r}\right)\\ \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\lambda_S}=-\cos\varphi_S\cos\varphi_S^*\sin(\lambda_S-\lambda_S^*)\\ \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi_S}=\cos\varphi_S\sin\varphi_S^*-\sin\varphi_S\cos\varphi_S^*\cos(\lambda_S-\lambda_S^*)\end{cases}\tag{4-3.53}$$

则有

$$\begin{cases}S_1(r,\psi)=\dfrac{6\rho}{r^3}-\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r^2-R^2}{r\rho^3}-\dfrac{4}{r\rho}+\dfrac{R\cos\psi}{r^3}\left(13+6\ln\dfrac{r-R\cos\psi+\rho}{2r}\right)\\ S_2(r,\psi)=-\dfrac{\partial S(r,\psi)}{\partial\cos\psi}\dfrac{\cos\varphi_s^*}{r}\sin(\lambda_s-\lambda_s^*)\\ S_3(r,\psi)=\dfrac{\partial S(r,\psi)}{\partial\cos\psi}\dfrac{1}{r}\left[\cos\varphi_S\sin\varphi_s^*-\sin\varphi_s\cos\varphi_s^*\cos(\lambda_S-\lambda_s^*)\right]\end{cases}\tag{4-3.54}$$

于是

$$\begin{cases}\delta g_r=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma S_1(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\\ \delta g_e=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma S_2(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\\ \delta g_n=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma S_3(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{4-3.55}$$

原则上讲，只要已知地面重力异常值 Δg_σ 及其对应的地心经纬度和其他参数，应用(4-3.55)式便可计算地球外部空间扰动引力分量。但在工程计算中，积分式(4-3.55)则是通过分块求和的方法进行近似计算的。具体说来，就是将球面 σ 按经纬度网格分成若干小块面积 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，先按(4-3.55)式计算每个小块面积 $\Delta\sigma_i$ 上的 $\delta g_j(j=r,e,n)$ 值，然后进行叠加，即

$$\begin{cases}\delta g_r=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta\sigma_i}S_1(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\\ \delta g_e=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta\sigma_i}S_2(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\\ \delta g_n=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta\sigma_i}S_3(r,\psi)\Delta g_\sigma\,\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{4-3.56}$$

设小块面积 $\Delta\sigma_i$ 中心的地心纬度和经度分别为 φ_{Si}^* 及 λ_{Si}^*，面其四边的经纬度差分别为 $\Delta\lambda_{Si}$ 和 $\Delta\varphi_{Si}$，当 $\Delta\sigma_i$ 很小时，在 $\Delta\sigma_i$ 内即有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\cos\psi = \cos\psi_i = \sin\varphi_S \sin\varphi_{Si}^* + \cos\varphi_S \cos\varphi_{Si}^* \cos(\lambda_S - \lambda_{Si}^*) \\ S_1(r,\psi) = S_1(r,\psi_i) \\ S_2(r,\psi) = S_2(r,\psi_i) \\ S_3(r,\psi) = S_3(r,\psi_i)\end{cases} \tag{4-3.57}$$

而小块面积 $\Delta\sigma_i$ 内的平均重力异常值 $\Delta g_\sigma^{(i)}$ 则可表为

$$\Delta g_\sigma^{(i)} = \frac{1}{\Delta\sigma_i}\int_{\Delta\sigma_i} \Delta g_\sigma \mathrm{d}\sigma \tag{4-3.58}$$

将(4-3.57)、(4-3.58)代入(4-3.56)式,则得

$$\begin{cases}\delta g_r = \dfrac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n} \Delta g_\sigma^{(i)} S_1(r,\psi_i)\Delta\sigma_i \\ \delta g_e = \dfrac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n} \Delta g_\sigma^{(i)} S_2(r,\psi_i)\Delta\sigma_i \\ \delta g_n = \dfrac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n} \Delta g_\sigma^{(i)} S_3(r,\psi_i)\Delta\sigma_i\end{cases} \tag{4-3.59}$$

由于

$$\Delta\sigma_i = R^2 \cos\varphi_{si}^* \Delta\varphi_{si}\Delta\lambda_{si} \tag{4-3.60}$$

在 $\Delta\sigma_i$ 很小的情况下,可近似认为

$$\frac{\Delta\varphi_{si}}{2} = \sin\left(\frac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)$$

因此,当 $\Delta\lambda_{si}$ 以"度"为单位表示时,小块面积可近似表为

$$\Delta\sigma_i = \frac{4\pi}{360} R^2 \cos\varphi_{si}^* \sin\frac{\Delta\varphi_{si}}{2}\Delta\lambda_{si} \tag{4-3.61}$$

于是(4-3.59)式成为

$$\begin{cases}\delta g_r = \dfrac{R^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta g_\sigma^{(i)} S_1(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^* \\ \delta g_e = \dfrac{R^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta g_\sigma^{(i)} S_2(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^* \\ \delta g_n = \dfrac{R^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta g_\sigma^{(i)} S_3(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^*\end{cases} \tag{4-3.62}$$

一般情况下,由于大地测量中给出的只是地形面上的平均重力异常值 $\Delta\bar{g}_i$,而不是球面上的平均重力异常值 $\Delta g_\sigma^{(i)}$,因此,这里需再做一次近似处理,即以 $\Delta\bar{g}_i$ 近似代替 $\Delta g_\sigma^{(i)}$。为减少由此产生的计算误差,以发射点至地心的距离 R_0 代替地球平均半径 R。

经以上近似处理,地球外部空间扰动引力分量 $\delta g_j (j = r, e, n)$ 的最终计算式可表为

$$\begin{cases}\delta g_r = \dfrac{R_0^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta\bar{g}_i S_1(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^* \\ \delta g_e = \dfrac{R_0^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta\bar{g}_i S_2(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^* \\ \delta g_n = \dfrac{R_0^2}{360}\sum_{i=1}^{n} \Delta\lambda_{si} \sin\left(\dfrac{\Delta\varphi_{si}}{2}\right)\Delta\bar{g}_i S_3(r,\psi_i)\cos\varphi_{si}^*\end{cases} \tag{4-3.63}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\begin{cases}\cos\psi_i = \sin\varphi_s\sin\varphi_{si}^* + \cos\varphi_s\cos\varphi_{si}^*\cos(\lambda_s - \lambda_{si}^*)\\ \rho_i = (r^2 + R_0^2 - 2rR_0\cos\psi_i)^{\frac{1}{2}}\\ S_1(r,\psi_i) = \dfrac{6\rho_i}{r^3} - \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{r^2 - R_0^2}{r\rho_i^3} - \dfrac{4}{r\rho_i} + \dfrac{R_0\cos\psi_i}{r^3}(13 + 6\ln\dfrac{r - R_0\cos\psi_i + \rho_i}{2r})\\ S_2(r,\psi_i) = -\dfrac{\partial S(r,\psi_i)}{\partial\cos\psi_i}\dfrac{\cos\varphi_{si}^*}{r}\sin(\lambda_s - \lambda_{si}^*)\\ S_3(r,\psi_i) = \dfrac{\partial S(r,\psi_i)}{\partial\cos\psi_i}\dfrac{1}{r}[\cos\varphi_S\sin\varphi_{si}^* - \sin\varphi_s\cos\varphi_{si}^*\cos(\lambda_s - \lambda_{si}^*)]\\ \dfrac{\partial S(r,\psi_i)}{\partial\cos\psi_i} = \dfrac{2rR_0}{\rho_i^3} + \dfrac{6R_0}{r\rho_i} - \dfrac{8R_0}{r^2} - \dfrac{3R_0}{r^2}(\dfrac{r - R_0\cos\psi_i - \rho_i}{\rho_i\sin^2\psi_i} + \ln\dfrac{r - R_0\cos\psi_i + \rho_i}{2r})\end{cases} \tag{4-3.64}$$

若以大地坐标表示地面平均重力异常值 $\Delta\bar{g}_i$ 的位置时，那么 φ_{si}^*、λ_{si}^* 及 $\Delta\varphi_{si}$、$\Delta\lambda_{si}$ 可用下面公式计算，即

$$\begin{cases}\varphi_{si}^* = \mathrm{tg}^{-1}[(1-\tilde{\alpha}_1)^2\mathrm{tg}B_i^*]\\ \Delta\varphi_{si} = \mathrm{tg}^{-1}[(1-\tilde{\alpha}_1)^2\mathrm{tg}(B_i^* + \dfrac{\Delta B_i}{2})] - \mathrm{tg}^{-1}[(1-\tilde{\alpha}_1)^2\mathrm{tg}(B_i^* - \dfrac{\Delta B_i}{2})]\\ \lambda_{si}^* = L_i^*\\ \Delta\lambda_{si} = \Delta L_i\end{cases} \tag{4-3.65}$$

式中

$\tilde{\alpha}_1 = \dfrac{1}{298.3}$ 为地球扁率系数；

L_i^*、B_i^* 为 $\Delta\bar{g}_i$ 所在小块面积 $\Delta\sigma_i$ 中心的大地经度和纬度；

ΔL_i、ΔB_i 为 $\Delta\bar{g}_i$ 所在小块面积 $\Delta\sigma_i$ 的四边的大地经度差和纬度差。

在应用(4-3.63)式计算出扰动引力分量 $\delta g_j(j = r, e, n)$ 之后，即可应用(4-3.47)式很方便地求出其在发射坐标系各轴上的分量。

通过上述讨论可知，计算地球外部空间扰动引力的司托克斯积分法与梯度法、球谐函数展开法比较，具有计算精度高和计算范围不受限制的优点，即可适用于全程弹道计算。但由于其存在数学模型复杂和计算工作量大的缺点，因而常常应用于梯度法和球谐函数展开法不适用的场合。实际弹道计算中，司托克斯积分法一般用于 20～250km 高度范围内。

上面讨论过的计算地球扰动引力的几种方法，均因存在着计算复杂、应用范围受限制以及数学模型不精确而造成扰动引力计算值与实际值相差较大的缺点，因此它们并不是人们所要求的完善的、理想的计算方法。为适应导弹事业迅速发展的需要和进一步提高导弹射击精度的要求，人们一直在寻找完善、理想的扰动引力计算方法，下面介绍的点质量法就是目前计算空间扰动引力的较为理想的方法之一。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

4.3.4 点质量法

计算地球外部空间任一点的扰动引力的点质量法出现在20世纪70年代。经过理论和技术的进一步完善,它已成为大地测量中研究地球形状和重力场的一种有应用价值的方法,也在航天技术领域和远程弹道导弹的弹道设计中得到广泛的应用。

将从后面的讨论中得知,点质量法比司托克斯积分法的数学模型简单的多,而且产生扰动引力的点质量可在弹道解算前予先计算出来,以供弹道和诸元计算时使用,因此该方法具有计算工作量小,计算时间短的优点。

点质量法与计算扰动引力的单层密度法出于统一设计思想,换句话说,点质量法是单层密度法的改进和创新。单层密度法是将产生扰动引力的质量形象地视为均匀分布在无厚度、等密度,且包含在地球内部被称为贝亚哈马球的一个球壳上,使其地球外部任一点的扰动引力位等于该点的实际扰动引力位。而点质量法则是将均匀分布在贝亚哈马球壳上的质量离散化为有限个具有一定质量的点,在这些质点的作用下产生的扰动引力位同样等价于实际扰动引力位。

贝亚哈马球是指采用解析延拓的思想,将地球表面外的扰动引力位向下延拓直到地球内部球面面积为 σ 的一个球。该球半径为 R_c,球外扰动引力位为 T^*,且在地球表面 $\sum$ 和球面 σ 上同时满足调和函数第三边值条件关系式

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial T^*}{\partial r}+\dfrac{2}{r}T^*\right)\Big|_{\sum}=\Delta g \\ -\left(\dfrac{\partial T^*}{\partial r}+\dfrac{2T^*}{r}\right)\Big|_{\sigma}=\Delta g^* \end{cases} \tag{4-3.66}$$

其中 Δg^* 为 σ 表面上的虚拟重力异常,Δg 为地球表面 $\sum$ 上的重力异常(图4-10)。

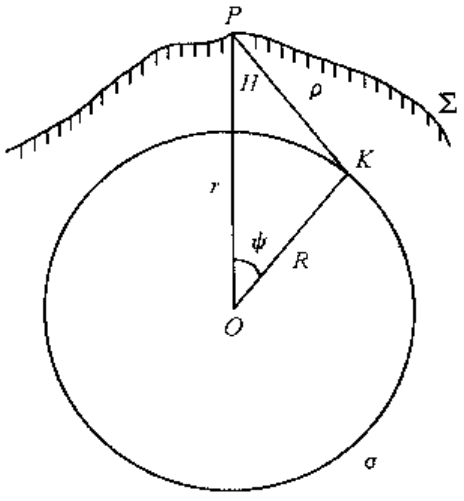


图4-10

1. 扰动引力计算式

由《弹道导弹重力学》知,假设 σ 球面单层密度为 μ,地球引力常数为 f,球外空间点 P

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

至球面面积元 $d\sigma$ 的距离为 ρ，根据单层扰动位理论导出的地球外 P 点的扰动引力位 T 表达式

$$T = T^* = f\iint_\sigma \frac{\mu}{\rho} d\sigma \tag{4-3.67}$$

导得该点扰动引力在北东坐标系各轴上的分量为

$$\begin{cases} \delta g_r = f\iint_\sigma \mu \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) d\sigma \\ \delta g_e = \dfrac{1}{r\cos\varphi_s} f\iint_\sigma \mu \dfrac{\partial}{\partial \lambda_s}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) d\sigma \\ \delta g_n = \dfrac{1}{r} f\iint_\sigma \mu \dfrac{\partial}{\partial \varphi_s}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) d\sigma \end{cases} \tag{4-3.68}$$

式中，φ_s，λ_s 为计算点 P 的地心纬度和经度；r 为计算点 P 至地心的距离；ρ 为 P 点至球面面积元 $d\sigma$ 中心点的距离。

采用类似于(4-3.50)式的推导方法，令

$$\begin{cases} q_1(r,\psi) = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \\ q_2(r,\psi) = \dfrac{1}{r\cos\varphi_s} \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\lambda_s} \dfrac{\partial}{\partial\cos\psi}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \\ q_3(r,\psi) = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi_s} \dfrac{\partial}{\partial\cos\psi}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \end{cases}$$

且将式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = -\dfrac{r - R_s\cos\psi}{\rho^3} \\ \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\lambda_s} = -\cos\varphi_s\cos\varphi_s^*\sin(\lambda_s - \lambda_s^*) \\ \dfrac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi_s} = \cos\varphi_s\sin\varphi_s^* - \sin\varphi_s\cos\varphi_s^*\cos(\lambda_s - \lambda_s^*) \\ \dfrac{\partial}{\partial\cos\psi}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = \dfrac{rR_s}{\rho^3} \end{cases}$$

代入上式，再代入(4-3.68)式，则得

$$\begin{cases} \delta g_r = f\iint_\sigma q_1(r,\psi)\mu\, d\sigma \\ \delta g_e = f\iint_\sigma q_2(r,\psi)\mu\, d\sigma \\ \delta g_n = f\iint_\sigma q_3(r,\psi)\mu\, d\sigma \end{cases} \tag{4-3.69}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} q_1(r,\psi) = -\dfrac{r - R_s\cos\psi}{\rho^3} \\ q_2(r,\psi) = -\dfrac{R_s}{\rho^3}\cos\varphi_s^* \sin(\lambda_s - \lambda_s^*) \\ q_3(r,\psi) = -\dfrac{R_s}{\rho^3}[\cos\varphi_s\sin\varphi_s^* - \sin\varphi_s\cos\varphi_s^*\cos(\lambda_s - \lambda_s^*)] \end{cases} \tag{4-3.70}$$

φ_s^*，λ_s^* 为面积元 $d\sigma$ 中心位置的地心纬度和地心经度。

在工程应用中，我们不去研究积分方程(4-3.69)的求解问题，而是象应用司托克斯积分方程求扰动引力的工程方法那样，采用分块求和的方法进行近似计算。当近似认为第 j 块面积元 $d\sigma_j = \Delta\sigma_j$，单层密度 μ_j = 常数，点质量为

$$M_j = \mu_j\Delta\sigma_j$$

时，则(4-3.69)式的分块求和式为

$$\begin{cases} \delta g_r = \sum_{j=1}^{N} q_1(r\cdot\psi_j)M_j \\ \delta g_e = \sum_{j=1}^{N} q_2(r\cdot\psi_j)M_j \\ \delta g_n = \sum_{j=1}^{N} q_3(r\cdot\psi_j)M_j \end{cases} \tag{4-3.71}$$

其中

$$\begin{cases} \rho_j = (r^2 + R_{sj} - 2rR_{sj}\cos\psi_j)^{1/2} \\ \cos\psi_j = \cos\varphi_s\cos\varphi_{sj}^* + \sin\varphi_s\sin\varphi_{sj}^*\cos(\lambda_s - \lambda_{sj}^*) \\ q_1(r,\psi_j) = -\dfrac{r - R_{sj}\cos\psi_j}{\rho_j^3} \\ q_2(r,\psi_j) = -\dfrac{R_{sj}}{\rho_j^3}\cos\varphi_{sj}^*\sin(\lambda_s - \lambda_{sj}^*) \\ q_3(r,\psi_j) = \dfrac{R_{sj}}{\rho_j^3}[\cos\varphi_s\sin\varphi_{sj}^* - \sin\varphi_s\cos_{sj}^*\cos(\lambda_s - \lambda_{sj}^3)] \end{cases} \tag{4-3.72}$$

N 为小方块个数；ρ_j 为 M_j 质点至计算点 P 的距离；R_{sj} 为 M_j 质点到圆球体中心的距离；ψ_j 为 r 与 R_{sj} 间的地心角(图 4-10)。

2. 点质量 M_j 的计算

将(4-3.6)式及其对 r 的偏导数代入(4-3.66)式中第一式得

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{2}{r}T^*\right) = f\iint_\sigma \left(\frac{r - R_s\cos\psi}{\rho^3} - \frac{2}{r\rho}\right)\mu\,d\sigma \tag{4-3.73}$$

相应地，(4-3.73)式的分块求和式为

$$\Delta g = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{r - R_s\cos\psi_j}{\rho_j^3} - \frac{2}{r\rho_j}M_j\right] \tag{4-3.74}$$

上式为地面重力异常 Δg 与点质量 M_j 间的关系式。如果已知地面之上的重力异常，那么通过上式即可在弹道解算前方便地预先计算出点质量 M_j，供弹道计算和诸元计算时使

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

用。

令

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\Delta g_1\\ \Delta g_1\\ \vdots\\ \Delta g_m\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ \vdots\\ M_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$$

则得线性方程组

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{AM} \tag{4-3.75}$$

式中

$$\begin{cases} a_{ij}=\dfrac{r_i-R_{sj}\cos\psi_{ij}}{\rho_{ij}^3}-\dfrac{2}{r_i\rho_{ij}}\\ r_i=R+H_i\\ R_{sj}=R-D_j\\ \cos\psi_{ij}=\sin\varphi_{ai}\sin\varphi_{sj}^{*}+\cos\varphi_{ai}\cos\varphi_{sj}^{*}\cos(\lambda_{ai}-\lambda_{sj}^{*})\\ \rho_{ij}=(r_1^2+R_{sj}^2-2r_iR_{sj}\cos\psi_{ij})^{1/2} \end{cases} \tag{4-3.76}$$

r_i，φ_{ai}，λ_{ai}为地面第 i 个重力异常点的地面距离，地心纬度和地心经度；

R_{sj}，φ_{sj}，λ_{sj}为地面下第 j 个点质量的地心距离，地心纬度和地心经度；

R 为地球平均半径；

H_i 为第 i 个重力异常点高程；

D_j 为第 j 个点质量的深度。

将(4－3.75)式等号两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，于是得点质量计算式

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{G} \tag{4-3.77}$$

若已知各类地面空间平均重力异常(…5°×5°，1°×1°，20′×20′，5′×5′，1′×1′)值的观测值，应用(4－3.77)式便可解出点质量，其解算的步骤如下：

(1) 以 5°×5°平均重力异常解出第一组点质量 M_1；

(2) 由 M_1 应用(4－3.75)式和(4－3.76)式计算出 1°×1°方块中心点处的重力异常 Δg_M，并从已知 1°×1°平均重力异常值减去该计算值求得残差，以这组残差值作为观测值解出第二组点质量 M_2；

(3)由计算出 M_1，M_2 点质量值计算 20′×20′方块中心点处的重力异常值 Δg_M，并从已知 20′×20′平均重力异常值中减去该计算值，求得重力异常残差，以这组残差为作观测值解出第三组点质量 M_3；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(4)用上述方法依次直至解得与 $1' \times 1'$ 残差重力异常相应的第五组点质量 M_5。

上述点质量的迭加,就成了对应重力异常频谱分布区域的点质量模型。应用这些点质量模型和扰动引力计算式(4-3.71),先求得地面外一点 P 的扰动引力在北东坐标系各坐标轴上的分量,进而再应用(4-3.45)式求得扰动引力在发射坐标系各轴上的分量。

从前面讨论可以看出,计算扰动引力的点质量法的数学模型简单,便于计算,而且由于各小块的点质量可予先计算,以供弹道和诸元计算时使用,因此其计算工作量小,计算速度快。另外,它还顾及到了地形起伏对扰动引力和点质量的影响问题,所以计算扰动引力的点质量法的精度高。

地球外部空间扰动引力计算的方法还有许多,如"表层法"、"向上延伸法"和"残差表层法"等,且可从有关文献中查阅到,所以这里不再一一介绍。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第五章 空气动力及力矩

弹道式导弹的主动段和再入段都是在地球大气层中飞行，因而受到空气动力的作用。在本章将介绍地球大气、空气动力及其力矩产生的原理与计算公式。

§5.1 地球大气

围绕地球表面的空气层，称为地球大气。尽管人类今天已由大气层的飞行时代进入到宇宙航行的时代，但空气依然是各类飞行器飞行的重要介质，因此，我们有必要对大气的成份、结构、物理性质以及标准大气等问题有所了解。

5.1.1 大气成分

空气，实际上是氮、氧、氩、二氧化碳、氢、臭氧、水蒸气以及工业气体等多种气体的混合物。空气中所含某种气体的成分的多少，可用单位体积空气内所含该气体体积的百分数来表示。这种表示方法的好处在于，即使当空气的压强（压力）和温度在很大范围内变化时，这种体积的百分数也不会有多大的变化。

根据实际测定，大气的成分在沿距地面（海平面）的高度上可分为均质层和非均质层两种。在距地面 95km 以下的均质层中，特别是在地面附近，空气中所含各种气体成分的体积百分数基本上是不变的。按体积计算，空气中的氮气约占 78.03%，氧气约占 20.99%，氩气约占 0.93%，而其余微量气体（二氧化碳、氢、臭氧、水蒸气与工业气体等）的总和则不到 1%。

当高度延伸到 95km 以上的非均质层中时，由于太阳紫外线的强烈辐射，大气中氮、氧和其它气体将被分解而处于原子状态。

5.1.2 大气结构

整个大气层内的结构是很复杂的。由于地球形状与太阳辐射的影响，大气温度沿海平面高度以上的分布特性极为复杂，而由于温度沿高度分布的复杂性，又导致了其它大气参数（压强、密度与音速等）与物理特性（粘性、压缩性与导热性等）沿高度分布的复杂性。

在地球引力的作用下，大气主要集中在地面附近。据统计，在距离地面 5km 的范围内含有将近全部大气质量的 50%，而在高度 20km 的范围内则含有全部大气质量的 90%。因此，可以说，靠近地面的大气较稠密，而远离地面的大气则较稀薄，最后逐步过渡到无大气的宇宙空间去。整个大气层的厚度约为 2000 ~ 3000km。根据多年来人们对大气探测的结果，特别是近年来人造地球卫星探测结果，大气沿高度的结构模型已基本弄清楚，并由国际气象组织共同研究规定，将大气层沿高度分为五层，即对流层、同温层、中间层、电

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

离层和外大气层。

1. 对流层

大气的低层是对流层，其距海平面的高度约为 11km。在这层大气中集中了整个大气质量的 75%，并在地面上，每立方厘米(cm^3)中约含有 2.7×10^{19} 个空气分子，这个数字与地球上现有人口 5×10^9 相比还大约 54 亿倍。因此说，对流层是一层稠密的大气层。

在对流层中，大气因受地面吸收的太阳光能的加热和起伏不平的地形影响，呈现出下层热空气不断上升而上层冷空气不断下沉的强烈对流现象。大气的温度、压强和密度随高度的增加而急剧下降，并经常发生着云、雾、雪、雷、电、风、暴风雨以及旋风等各种天气现象。

对流层的高度可由其温度终止下降的高度而确定，但这在各个纬度上并不一致。在赤道附近，对流层高度最高，可达 17～18km，在两极处，高度则最低，约为 8km，而且这些高度还与季节和其它因素有关。在平均纬度(45°)上，可认为对流层的平均高度约为 11km。

根据测定，在对流层中，大气平均地面温度 t_0 为摄氏温标 15℃，即开氏温标 288.15K，地面密度 ρ_0 为 1.225(kg/m^3)，而地面压强 p_0 为 101325(Pa)，约 1013.25 毫巴(mb)。在高度 5Km 处，大气温度约降为 255.65K，而相对密度比 ρ/ρ_0 约为 6×10^{-1}，其相对压强比 p/p_0 约为 5.3×10^{-1}；在对流层的上限 11km 处，大气温度将降到 216.65K，而密度比约为 2.2×10^{-1}，压强比约为 3×10^{-1}。

此外，在对流层中，温度随高度的变化率(简称温度梯度)$\partial T/\partial H$ 约为 -6.5°K/km，且在相当大的范围内有水平风和垂直风。水平风是由于地面上复杂地形造成的气压差所引起，而垂直风则是因温度随高度分布的差异形成的。

2. 同温层

对流层的上层是同温层，其高度约为 11～25km。

同温层的特点是，大气温度几乎保持不变，约等于 216.65K。在这层大气中，由于地形对大气的影响已不显著，因而既无对流现象和复杂的天气现象，也没有垂直方向的大气流动，但存在着一定的水平风。所以，同温层又名平流层。

在对流层和同温层中，大约集中了大气全部质量的 90% 以上，与对流层相比，同温层的大气稀薄度降低了 1 个数量级。

在同温层中，由于很少出现复杂的天气现象，因而也最适宜于一切靠大气而飞行的飞行器(飞机、气球等)的飞行。

3. 中间层

同温层之上是中间层，其高度约为 25～90km。

这层大气的特点是，大气在太阳红外线的强烈辐射下进行着剧烈的化学反应，以致生成大量的臭氧成分，同时也引起部分空气分子的电离。

由于臭氧的吸热率高，因而开始时使气温急剧回升。在 47km 处，大气温度约可达 270.65K，温度梯度$\partial T/\partial H$ 约为 2.45K/km；随后在 51km 处，气温又行降低，大约到 85km 处，大气温度又随着高度的增加而增加。

在中间层的上层，大气已很稀薄。据测定，在 60km 处的密度比约为 2.4×10^{-4}，而压强比约为 2.0×10^{-4}；80km 处的密度比约为 1.3×10^{-5}，而压强比约为 8.9×10^{-6}；90km 处

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的密度比已降到 2.1×10^{-6}，而压强比约为 1.4×10^{-6}；显然，在 80km 以上，大气的存在已对各类飞行器的影响失去意义，因而在此高度以上可以忽略大气的存在而当做真空来处理。

4. 电离层

中间层之上是电离层，其高度约为 90～500km。

这层大气层的特点是，空气极度的稀薄和气压异常的低下（300km 处的密度比和压强比约为 1.1×10^{-11} 和 6.4×10^{-11}），在太阳光的强烈辐射下，气温随高度的增加而迅速升高，可高达 999.64K，因而导致众多的空气分子的分解和电离，形成大量带电的正负离子，导电性强，可较好地反射无线电波。

根据测定，在高度 100km 处，大气温度约为 199K，密度比约为 3.2×10^{-7}，压强比约为 2.3×10^{-7}；在 120km 处，温度为 383.6K，密度比约为 1.4×10^{-8}，压强比约为 2.1×10^{-8}；在 150km 处，温度为 654K，密度比约为 1.5×10^{-9}，压强比约为 4.0×10^{-9}；在 200km 处，温度为 870K，密度比约为 1.7×10^{-10}，压强比约为 7.1×10^{-10}；在 300km 处，温度为 981K，密度比约为 1.1×10^{-11}，压强比约为 6.4×10^{-11}；在 400km 处，温度为 997K，密度比和压强比则分别降为 1.4×10^{-12} 和 9×10^{-12}；

5. 外大气层

电离层之上是外大气层，其高度从 500km 延伸到 3000km。

这是一层向星际空间过渡的区域，它无明显的边界。在这层大气中，空气的稀薄程度小到每立方厘米仅含有 10^5 分子，即约为地面同体积分子数的 270 万亿分之一（$1/2.7\times10^{14}$）。在高度 864km 处，大气相对密度比和压强比也仅有 2.9×10^{-15} 和 7.4×10^{-14}，但气温却高达 1000K 左右，这显然是由于太阳光强烈辐射的缘故。

由于这层大气离地面太远，空气分子所受地球引力也很小，因而常常有空气分子向星际空间逃逸出去，故外大气层也称逃逸层。

综上所述，大气沿高度的分布特性是极为复杂的，各层之间也并非有一明显的界限，而是彼此间存在一个较薄的过渡区域；在气象学上它们分别称为对流休止层、同温休止层、中间休止层和电离休止层。

地球大气沿高度的分布特性如图 5－1 所示。

5.1.3 国际标准大气

我们知道，空气动力学是研究空气运动规律以及空气与其流经物体间作用力问题的一门科学。当飞行器在大气层中飞行或当气体（燃气）在发动机中流动时，气体的流动规律、空气对飞行器的作用力以及气体对发动机性能参数的影响均与大气的压力 p、密度 ρ 和温度 T 等状态参数密切相关，而大气的状态参数 p、ρ、T 不仅与距地面的高度有关，并且也受到地区、季节和昼夜等因素的影响。为了便于分析、计算和比较飞行器或发动机的性能，国际上需要制定一种大气参数的统一规范，以便大家遵循。这种经国际气象部门共同协商制定的大气参数规范，称为国际标准大气。

根据人们利用各种手段（气球及人造卫星等）对地球大气探测的结果，国际上选取地球中纬度地区（一般以地理纬度 45°32′33″地区海平面为基准）全年实际大气参数的统计平

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

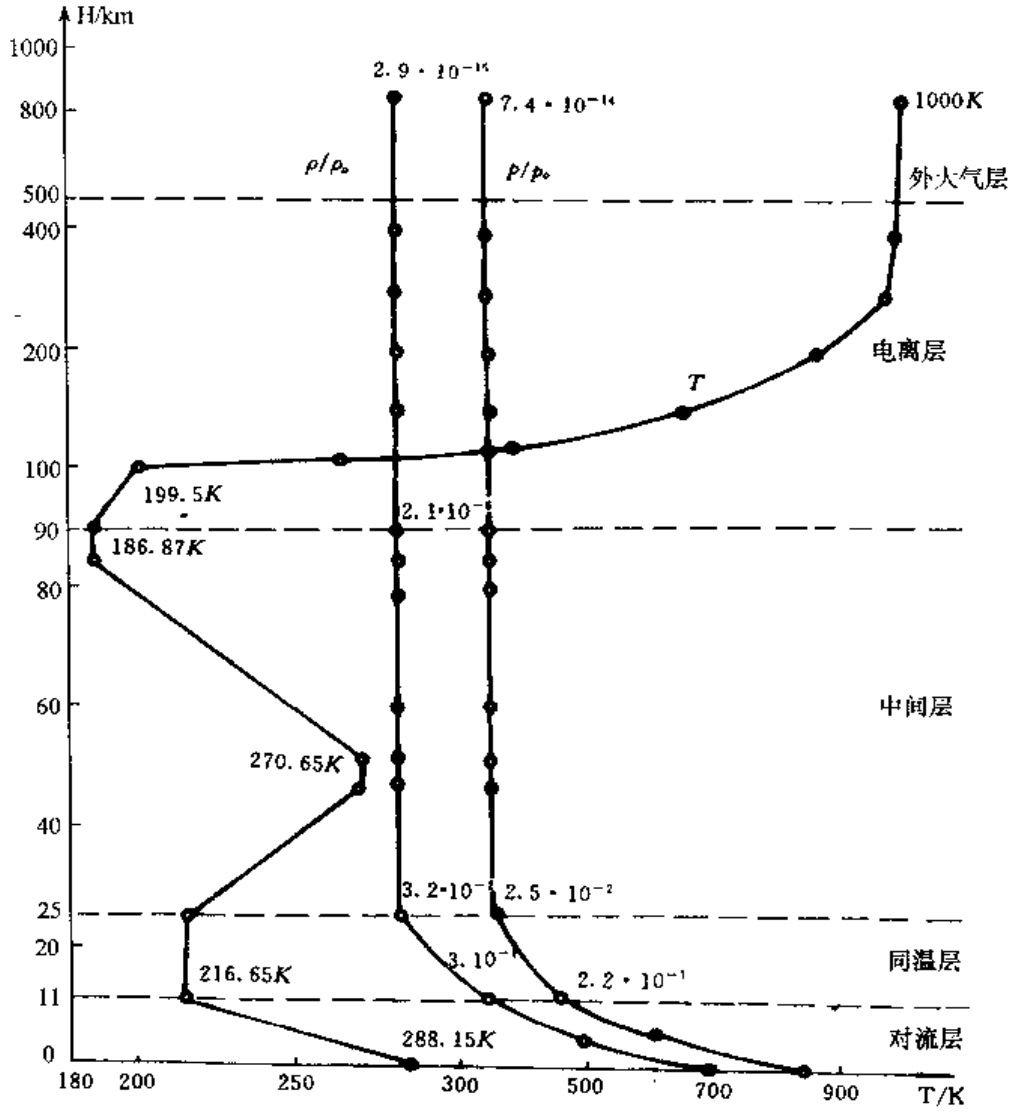


图 5-1

均值作为标准大气参数,并认为大气是相对湿度为零的完全气体。

国际标准大气因专业实践应用的不同以及对大气探测结果的不同而略有差异。目前国际上正在使用的标准大气是 1976 年美国航空与宇航局所制定的美国标准大气。《美国标准大气(1976)》的内容可参见附录 3,这里不再详述。

§5.2 空气动力

5.2.1 空气动力产生的机理

当物体静止地放置于理想的大气中时,作用于其外表面上的大气压强可认为是处处相等的,因而大气压强的合作用力为零。但如果物体与理想空气有相对运动时,作用在物体上的大气压强就不再处处相等,从而出现了不平衡的大气压强之合作用力,即空气动

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

力。下面我们就具体地通过气流流经翼剖面的流线图，说明空气动力产生的物理实质(图5-2)。

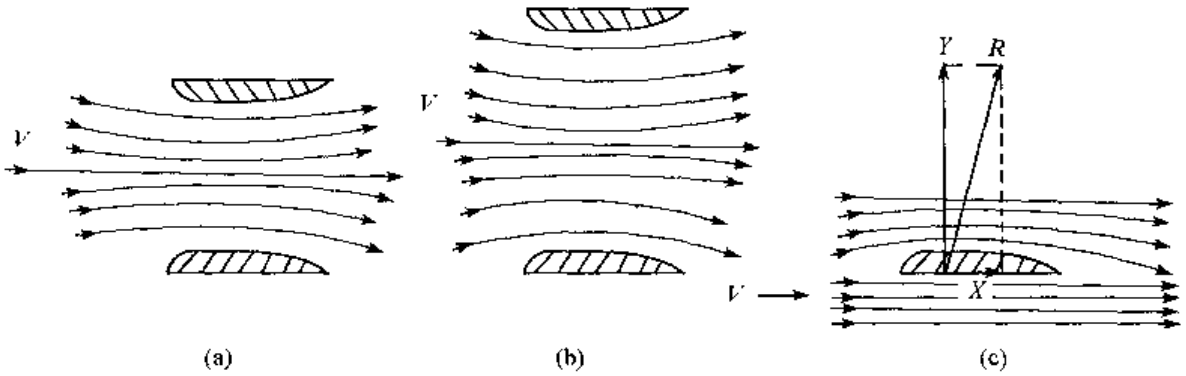


图5-2

首先，当空气定常地流过如图5-2(a)所示的一个外表面平直而内表面呈圆拱形的管道时，气体质点微团将形成疏密程度不同的流线束，这种流线束，称为流线谱。流线谱的疏密程度与通流面积的大小有关，事实上，由连续方程可知，在管道的狭窄处，由于通流截面小，流速增大流线就密集，反之则反。其次，根据动量方程(伯努利方程)，在流速增大的地方，其压强必然减小，反之则反。由此可知，流线谱的疏密程度不仅反映了流速的大小，而且也指明了压强的高低。这一客观规律，从质量守恒观点看是始终存在着的，即使将管道加粗，如图5-2(b)所示，也由于管道内表面弯曲处是收缩的，因而这儿的流速仍然较大，而压强仍然较小，甚至把管道无限加粗，即把两个剖面间的距离增加到无限大，以致认为只剩下如图5-2(c)所示的剖面情况时，此时气流流经它的流动规律也仍然是上表面流速大、压强小，而下表面流速小、压强大。这一客观规律，对实际气体(粘性气体)也同样存在。由此看来，作用于物体上的空气动力是由物体外表面上压强分布的不同而造成的。换言之，空气动力是物体外表面压强差的合作用力，通常以符号 $\boldsymbol{R}$ 表示。

对于飞行导弹来说，作用于其上的空气动力的产生机理与翼剖面完全一样，只不过在通常具有飞行冲角 α 和侧滑角 β 的情况下，作用其上的空气动力 $\boldsymbol{R}$ 是一空间向量而已。

空气动力的大小与物体外表面上的压强分布有关，由空气动力学知，其值通常用下列表达式计算

$$R = C_R \frac{1}{2}\rho V^2 S_m = C_R q S_m \tag{5-2.1}$$

其中

C_R 为无因次的总空气动力系数；

ρ 为空气密度；

V 为飞行器的飞行速度；

S_m 为飞行器特性面积(导弹取弹体最大横截面积 S_m，弹翼取平面面积 S_r)；

$q = \frac{1}{2}\rho V^2$ 称为速度头或速压。

空气动力的作用点，称为压力中心，简称压心，通常以符号 O_y 表示。一般情况下，导

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

弹外形是轴对称的，因而压心应在弹体纵对称轴上，且压心 O_y 并不与导弹的质心 O_z 相重合。以后将会看到，为获得一定的气动静稳定度，常常人为地使压心落在质心之后，为此就需对导弹的气动外形有所选择。

在导弹相对大气运动时，如何确定作用在导弹上的空气动力是一个颇为复杂的问题，很难通过理论计算准确确定。目前是用空气动力学理论进行计算与空气动力实验校正相结合的方法。空气动力实验是在可产生一定马赫数的均匀气流的风洞中进行。在实验时，按比例缩小了的实物模型静止放在风洞内，然后使气流按一定的 M 数吹过此模型，通过测量此模型所受的空气动力计算出其气动力系数，然后应用相似转换原理，求得实物在这些 M 数下所受到的空气动力。

在导弹研制过程中，由研究空气动力学的专门人员根据导弹外形，利用上面谈及的方法，给出该型号导弹的空气动力计算时所必需的数表、曲线和数学模型等。正确地使用这些资料，即可确定作用在导弹上的气动力和气动力矩。

5.2.2 空气动力数学表达式

1. 空气动力在速度坐标系各轴上的分量

实际应用中，由于空气动力的实际测量是以物体基准线（如导弹轴对称线）与来流成一定冲角或侧滑角的情况下进行的，因而人们将总的空气动力 $\boldsymbol{R}$ 在速度坐标系的各轴上进行分解，并将 $\boldsymbol{R}$ 在 x_c 轴的负向（来流速度方向）分量称为空气阻力，用 X 表示，而将 $\boldsymbol{R}$ 在 y_c 轴和 z_c 轴正方向上分量分别称为空气升力和侧力，各以 Y 和 Z 表示（图 5－3）。于是有

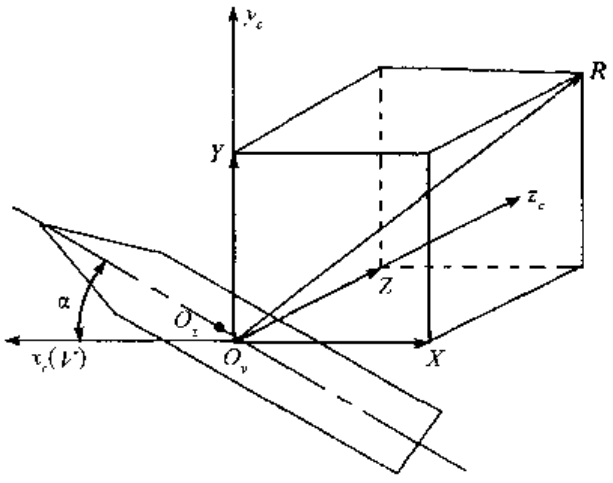
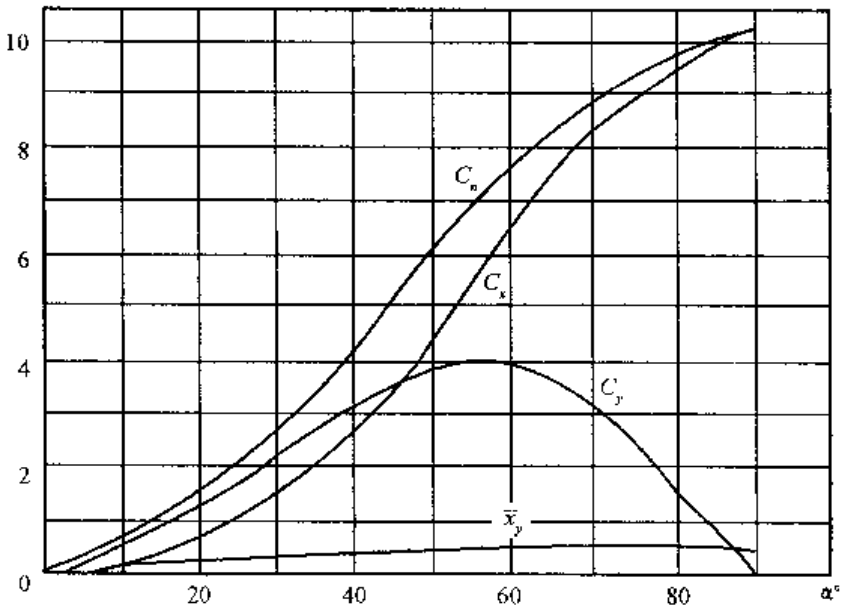


图 5－3

$$\begin{cases} X = C_x q S_m \\ Y = C_y q S_m \\ Z = C_z q S_m \end{cases} \tag{5-2.2}$$

式中，C_x、C_y、C_z 分别为无因次的空气阻力、升力和侧力系数。将从后边的讨论和图 5－4 看出，在冲角 α 及侧滑角 β 较小的情况下，C_y 及 C_z 可表示为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com



C_x、C_y、C_n、$\bar{x}_y = f(\alpha)$ (M≤0.3)

图 5－4

$$\begin{cases} C_y = C_y^{\alpha}\alpha \\ C_z = C_z^{\beta}\beta \\ C_z^{\beta} = -C_y^{\alpha} \end{cases} \tag{5-2.3}$$

式中

C_y^{α} 为升力系数对攻角的偏导数；

C_z^{β} 为侧力系数对侧滑角 β 的偏导数。

2. 空气动力在弹体坐标系各轴上的分量

前面已将空气动力 $\boldsymbol{R}$ 投影在速度坐标系的三轴上，并分别称为气动阻力 X、气动升力 Y 和气动侧力 Z，这样的投影不仅符合空气动力产生的原理，而且也便于直接测量。但为了计算空气的力矩，我们还需要用类似的方法将空气动力 $\boldsymbol{R}$ 投影于弹体坐标系的三轴上，并将其在 x_1 轴的负方向取值，则有(图 5－5)

$$\begin{cases} X_1 = C_{x1}qS_m \\ Y_1 = C_{y1}qS_m \\ Z_1 = C_{z1}qS_m \end{cases} \tag{5-2.4}$$

式中，X_1、Y_1、Z_1 分别称为轴向力、法向力和侧向力；

C_{x1}、C_{y1}、C_{z1} 分别为轴向力、法向力和侧向力系数。

在小冲角 α 和小侧滑角 β 下，C_{y1}、C_{z1} 及 C_{z1}^{β} 可表成

$$\begin{cases} C_{y1} = C_n^{\alpha}\cdot\alpha \\ C_{z1} = C_{z1}^{\beta}\cdot\beta \\ C_{z1}^{\beta} = \dfrac{\partial C_{z1}}{\partial\beta} = -C_n^{\alpha} \end{cases} \tag{5-2.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

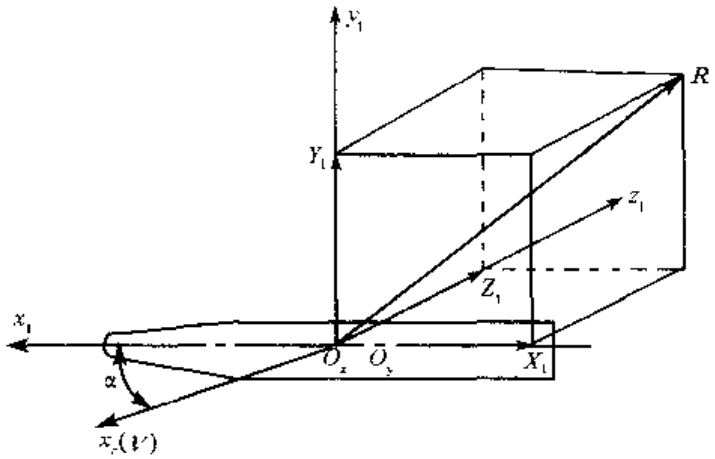


图 5-5

其中，$C_n^\alpha = C_{y1}^\alpha = \partial C_{y1}/\partial\alpha$ 称为法向力系数导数或法向力系数梯度，与 C_y^α 一样，其值恒为正。C_{z1}^β 称为侧向力系数导数或侧向力系数梯度，与 C_z^β 一样，其值恒为负。

根据弹体坐标系与速度坐标系的方向余弦关系，且当 α、β 角很小，可近似认为 $\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$、$\sin\alpha \approx \alpha$、$\sin\beta \approx \beta$、$C_y = C_y^\alpha \cdot \alpha$ 和 $C_z = -C_y^\alpha \cdot \beta$ 时，则得简化式

$$\begin{cases} -C_{x1} = -C_x + C_y^\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \\ C_n^\alpha = C_x + C_y^\alpha(1 - \beta^2) \\ C_{z1}^\beta = -C_x - C_y^\alpha \end{cases} \tag{5-2.6}$$

当进一步略去上式中的二阶微量时，则有

$$\begin{cases} C_{x1} = C_x \\ C_n^\alpha = C_x + C_y^\alpha \\ C_{z1}^\beta = -C_n^\alpha \end{cases} \tag{5-2.7}$$

3. 空气动力在总攻角坐标系各轴上的分量

空气动力矢 $\boldsymbol{R}$ 及其系数可用速度坐标系和弹体坐标系各轴上的分量表达式进行描述，也可沿总攻角坐标系各坐标轴进行分解，而且在现代的空气动力实验中，常常又是相对总攻角坐标系的形式给出的。

(1) 总攻角坐标系及欧拉角定义

总攻角坐标系的定义如下：坐标系原点取导弹质心 o_z；$o_z x_N$ 轴沿导弹纵对称轴，指向弹头方向，即与 ox_1 轴重合；$o_z y_N$ 轴在 $o_z x_c x_N$ 平面内，垂直于 $o_z x_N$ 轴，且指向上为正；$o_z z_N$ 轴与 $o_z x_N$，$o_z y_N$ 轴构成右手直角坐标系。

导弹速度矢 $\boldsymbol{V}$ 相对总攻角坐标系的方位用两个欧拉角来描述：

总攻角 η：它是指导弹速度 $\boldsymbol{V}(o_z x_c)$ 与其纵对称轴 $o_z x_N$ 间的夹角，且规定：当飞行速度矢 $\boldsymbol{V}$ 沿 $o_z y_N$ 轴的分量为负(或导弹不动，来流速度沿 $o_z y_N$ 轴的分量为正)时，η 定义为正值，反之定义为负。

气动滚转角(或滚转角)γ^*：它是指导弹纵对称平面 $o_z x_1 y_1$ 与 $o_z x_c x_1$(速度平面)平面

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

间的夹角，且规定：当沿速度 $V(o_c x_c)$ 方向看去，弹体坐标系 $o_c y_1$ 轴绕 ox_1 轴顺时针旋转时，γ^* 定义为正，反之，定义为负。

(2)坐标系间的关系矩阵

总攻角坐标系，弹体坐标系和速度坐标系间的关系如图 5－6 所示。

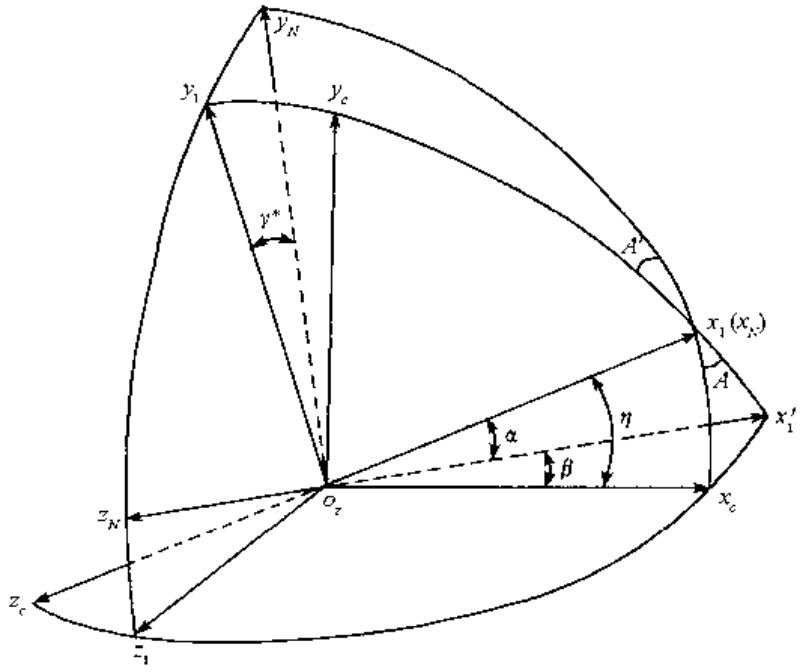


图 5－6

由图 5－6 可知，总攻角坐标系 $o_c x_N y_N z_N$ 可由弹体坐标系 $o_c x_1 y_1 z_1$ 绕 $o_c x_1$ 顺时针旋转 γ' 角得到，因此总攻角坐标系与弹体坐标系间的关系矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma^* & -\sin\gamma^* \\ 0 & \sin\gamma^* & \cos\gamma^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{5-2.8}$$

当然，总攻角坐标系也可以看作由速度坐标系先绕 $o_c y_c$ 轴逆时针旋转一个 β 角，再绕 $o_c z_1$ 轴逆时针旋转 α 角，尔后绕 $o_c x_1$ 轴顺时针旋转 γ^* 角得到。因此总攻角坐标系与速度坐标系间的关系矩阵，可借助弹体坐标系与总攻角坐标系、速度坐标系与弹体坐标系间的关系矩阵式得到，即

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_N^c \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \tag{5-2.9}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_N^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma^* & -\sin\gamma^* \\ 0 & \sin\gamma^* & \cos\gamma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{5-2.10}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(3)欧拉角间的关系

根据图 5-6,应用球面三角形的边角余弦定理,可直接导出总攻角 η 与冲角 α 和侧滑角 β 间的几何关系

$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\beta \tag{5-2.11}$$

在球面三角形 $\Delta x_c x', x_1$ 和球面三角形 $\Delta x_1 y_N y_1$ 中,根据球面三角形正弦定理分别可得

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \\ \sin A' = \sin\gamma^* \end{cases} \tag{5-2.12}$$

因为 $\sin A = \sin A'$,所以

$$\sin\gamma^* = \frac{\sin\beta}{\sin\eta} \tag{5-2.13}$$

在球面三角形 $\Delta x_1 y_N y_1$ 中,根据球面三角形余弦定理可得

$$\cos\gamma^* = \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} \tag{5-2.14}$$

由(5-2.13)式和(5-2.14)式,故得气动滚动角 γ^* 与攻角 α 及侧滑角 β 间的关系式为

$$\mathrm{tg}\gamma^* = \frac{\sin\gamma^*}{\cos\gamma^*} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha} \tag{5-2.15}$$

由(5-2.13)式可直接得侧滑角 β 与总攻角 η 和气动滚动角 γ^* 间的关系式。而应用(5-2.11)式和(5-2.14)式,便得攻角 α 与总攻角 η 和气动滚动角 γ^* 间的关系式,即

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\eta\cos\gamma^* \\ \sin\beta = \sin\eta\sin\gamma^* \end{cases} \tag{5-2.16}$$

在风洞实验和弹道计算中,欧拉角 η、γ^*、α 及 β 的取值范围为:

$$-90^\circ \leqslant \eta \leqslant +90^\circ$$
$$-90^\circ \leqslant \gamma^* \leqslant +90^\circ$$
$$-90^\circ \leqslant \alpha \leqslant +90^\circ$$
$$-90^\circ \leqslant \beta \leqslant +90^\circ$$

如果攻角 α 和侧滑角 β 已知,那么总攻角 η 正负值的判断方法为

当 $\alpha > 0$ 时　　则 $\eta > 0$

当 $\alpha < 0$ 时　　则 $\eta < 0$

当 $\alpha = 0$,且 $\beta > 0$ 时　则 $\eta = \beta$

当 $\alpha = 0$,且 $\beta < 0$ 时　则 $\eta = -\beta$

气动滚转角 γ^* 的判断方法如下:

当 α 与 β 同号时　$\gamma^* > 0$

当 α 与 β 反号时　$\gamma^* < 0$

当 $\beta = 0$ 时　　$\gamma^* = 0$

当 $\alpha = 0$,且 $\beta > 0$ 时　$\gamma^* = 90^\circ$

当 $\alpha = 0$,且 $\beta < 0$ 时　$\gamma^* = -90^\circ$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(4)空气动力及其系数

在空气动力实验中,对于气动外形一定的弹道导弹,常将空气动力系数表为飞行速度或飞行速度、飞行高度或攻角的函数。事实上,空气动力系数与多种因素有关,在飞行速度、飞行高度给定时,同时又是攻角和侧滑角,或总攻角和气动滚转角 γ^* 的函数。因此空气动力矢 $\boldsymbol{R}$ 相对总攻角坐标系各轴进行分解时,其表达式为

$$\begin{cases} X_1 = A = C_A q S_m \\ Y_N = N = C_N q S_m \\ Z_N = C_{ZN} q S_m \end{cases} \tag{5-2.17}$$

其中

$$\begin{cases} C_A = (C_{Af} + C_{db} + \Delta_{AH}) \\ C_N = C_N^{\eta} \eta \end{cases} \tag{5-2.18}$$

$$\begin{cases} C_{Af}(\eta, \gamma^*) = C_{Af}(|\eta|, |\gamma^*|) \\ C_N(\eta, \gamma^*) = C_N(|\eta|, |\gamma^*|) sign(\eta) \\ C_N^{\eta}(\eta, \gamma^*) = C_N^{\eta}(|\eta|, |\gamma^*|) \\ C_{Z_N}(\eta, \gamma^*) = C_{Z_N}(|\eta|, |\gamma^*|) sign(\eta) \end{cases} \tag{5-2.19}$$

A——总气动轴向力,沿 x_N 反方向;

N——总法向力,沿 y_N 正方向;

Z_N——总侧向力,沿 z_N 正方向;

C_A 为总轴向力系数,即 $C_A = C_{x_1}$;

C_N 为总法向力系数;

C_{Z_N} 为总侧向力系数;

C_N^{η} 总法向力系数对总攻角 η 的偏导数;

C_{Af} 前体轴向力系数;

C_{db} 底部阻力系数;

ΔC_{AH} 轴向力系数高度修正量,即当地摩擦阻力系数与地面摩擦阻力系数之差。因为它与高度有关,故称轴向力系数高度修正量。

当已知总轴向力系数 C_A,总法向力系数 C_N 和总侧向力系数 C_{Z_N} 时,应用总攻角坐标系与弹体坐标系间关系矩阵(5-2.8)式,可求得相对弹体坐标系的气动力系数,即

$$\begin{cases} C_{x_1} = C_{A_1} = C_A \\ C_{y_1} = C_n = C_N \cos\gamma^* + C_{Z_N} \sin\gamma^* \\ C_{z_1} = C_{Z_N} \cos\gamma^* - C_N \sin\gamma^* \end{cases} \tag{5-2.20}$$

当然,相对弹体坐标系的轴向气动力系数、法向力系数、侧向力系数也可直接用下式求得

$$\begin{cases} C_{x_1}(\alpha, \beta) = C_{Af_1}(|\alpha|, |\beta|) \\ C_n^{\alpha}(\alpha, \beta) = C_n^{\alpha}(|\alpha|, |\beta|) \\ C_n(\alpha, \beta) = C_n(|\alpha|, |\beta|) sign(\alpha) \\ C_{z_1}(\alpha, \beta) = C_{z_1}(|\alpha|, |\beta|) sign(\beta) \end{cases} \tag{5-2.21}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

5.2.3 影响空气动力系数的因素

影响空气动力系数的因素很多，但主要的因素则是导弹的外部形状、飞行姿态、飞行速度、飞行高度以及高速飞行时出现的激波。

1. 导弹外形对 C_x、C_y、C_z 的影响

首先，导弹的外部形状，尤其是头部形状，对空气动力影响较大。其次是长细比 λ（弹体长度与弹体最大直径之比）。图 5-7(a)给出了不同头部外形时空气阻力系数随 M 的变化情况，而(b)则给出了不同长细比 λ 对阻力系数的影响。由此可知，导弹外部形状越接近于流线型以及长细比越大，则其阻力系数也就越小。

其次，导弹外部表面的光滑程度对空气动力系数也有影响，即表面越光滑以及突起物越少，则导弹表面的摩擦力就越小，因而阻力越小。因此，在导弹的设计和加工中，如何选择较好的气动外形与加工良好的表面质量是十分重要的工作；同样在导弹的战斗使用中，又如何保持导弹原有的外形及表面质量，也是一项不可忽视的工作。

2. 冲角 α、侧滑角 β 对 C_x、C_y、C_z 的影响

当冲角 α 增大时，气流在头部下方的阻滞增大，因而气流速度慢，压力增大；而在导弹头部上方则由于其流动截面相对变小，因而速度增大，压力降低。这样将使升力和阻力都进一步增加，因而其升力系数 C_y 和阻力系数 C_x，也将进一步增大（图 5-4）。同样，当侧滑角增大时，也将使侧力和侧力系数进一步增大。

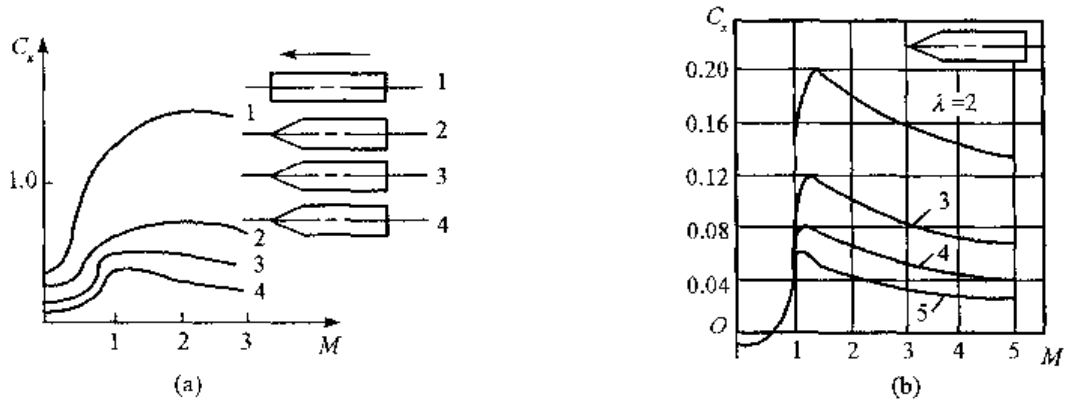


图 5-7

由 $C_y = C_y(\alpha)$ 曲线可知，在小冲角 α 范围内，$C_y = C_y(\alpha)$ 近似成线性关系，且 C_y 与 α 同号，故有

$$C_y = C_y^{\alpha} \cdot \alpha \tag{5-2.22}$$

式中 $C_y^{\alpha} = \partial C_y / \partial \alpha$ 为升力系数对冲角的偏导数，简称升力系数梯度，它始终为一正值，随着冲角的继续增大，C_y 与 α 不再是线性关系，且当 C_y 达到最大值 $C_{y\max}$ 时，如果迎角继续增大，还会引起 C_y 的下降，这是由于气流严重分离而造成的。

通常，由于弹道式导弹的飞行速度大，不需要大冲角来提供更大的升力，因而其飞行冲角 α 较小（一般为 2°～6°左右），因此，对弹道式导弹而言，这种线性关系总是成立的。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

此外，导弹的外形是轴对称的，因此其侧力系数 C_z 与侧滑角 β 的关系 $C_z(\beta)$ 类似于 $C_y(\alpha)$ 的关系。但由侧滑角的定义可知，正的 β 将产生负的侧力，因而 C_z 可表成

$$C_z = C_z^{\beta} \cdot \beta \tag{5-2.23}$$

式中，C_z^{β} 为侧力系数对侧滑角 β 的偏导数，简称侧力系数梯度，其值恒为负。如果 β 与 α 的数值相等时，则作用于导弹上的侧力系数与升力系数也必然相同，因而比较(5-2.23)与(5-2.22)两式可得

$$C_y^{\alpha} = -C_z^{\beta} \tag{5-2.24}$$

同样，C_x 随 β 的变化规律也类似于 C_x 随 α 的变化规律，即 C_x 随 α、β 之增大而增大。

3. 激波与 M 数对 C_x、C_y、C_z 的影响

由空气动力学知，当导弹作跨音速或超音速飞行时，就在导弹的头部或物面上产生激波。从实质上说，激波就是被强烈压缩了的一层极薄的气体层，且由于激波层后的气体速度急剧地降低，使一部分动能转变为不可逆的热能，并改变了外表面的压强分布，从而既加大了飞行阻力，同时也影响了导弹的飞行稳定性能。

由于飞行 M 数的不同，气体的可压缩程度也不同，因此气动力系数也就不同。图 5-7 示出了飞行 M 数与激波对气动力系数的影响待性。

4. 飞行高度 H 对 C_x、C_y、C_z 的影响

由于空气动力系数与大气密度、压力、温度以及气体粘性等因素有关，而这些因素又是随着飞行高度变化的，故空气动力及其系数也随高度 H 的不同而有所变化。

阻力系数 C_x 通常表成下列计算式

$$C_x = C_{x0}(M, H) + C_{xi}(\alpha, \beta) \tag{5-2.25}$$

其中 C_{x0} 为 $\alpha = \beta = 0$ 时的阻力系数。它与 α 及 β 无关，仅是 M 数和高度的函数，C_{x0} 随高度增加而增加，因气体流过飞行器表面时由于表面凸凹不平使气流分子受到阻滞，加上气体有一定的粘性，从面形成摩擦阻力 X_{1f}。该力除与气体粘性系数 μ 及导弹最大横截面 S_m 有关外，还与 V/L（V 为气体速度，L 为导弹特征长度）成正比，即

$$X_{1f} \propto \mu \frac{V}{L} S_m$$

而摩擦阻力系数为

$$C_{x1f} = \frac{X_{1f}}{qS_m} \propto \frac{\mu}{\rho VL} \tag{5-2.26}$$

由该式可见，在一定的 M 数下，随着高度增加气体密度 ρ 在减小，而 C_{x1f} 增加，这就增大了摩擦阻力在总空气动力中所占的比重，故阻力系数随高度增加而增加。

C_{xi} 为诱导阻力系数，通常只需对法向力和横向力在阻力方向的分量作一修正即可，故计算时用

$$C_{xi} = KC_{y1}^{\alpha}(\alpha^2 + \beta^2) \tag{5-2.27}$$

其中 K 为与导弹形状有关的系数。

对于升力系数及其梯度来说，由于高空密度急剧降低导致物体表面压强分布的变化而使升力急剧减小，因而升力系数及其梯度也减小。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§5.3 空气动力矩

一般情况下，导弹在飞行过程中，空气动力的作用点（压心）并不与其质心 O_s 相重合，那么空气动力 $\boldsymbol{R}$ 必将对质心形成转动力矩，这种力矩称为气动稳定力矩，记为 $\boldsymbol{M}_t$。另外，当导弹产生相对于大气的转动时，大气将对其产生阻尼作用，该作用力矩称为阻尼力矩，记为 $\boldsymbol{M}_d$。

5.3.1 气动稳定力矩

由力对点的力矩的定义知，气动稳定力矩可表为

$$\boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} \tag{5-3.1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为压心对质心的矢径。力对导弹质心之矩常以弹体坐标系三轴之力矩表示，即轴向力 X_1、法向力 Y_1 和侧向力 Z_1 对弹体坐标系三轴之力矩。

当将气动力矩 $\boldsymbol{M}_t$ 在弹体坐标系各轴上分解时，则可得到气动力 $\boldsymbol{R}$ 各分量对 x_1、y_1、z_1 三轴的分力矩。由于轴向力 X_1 沿弹轴并通过质心，故其对质心无力矩，即 $M_{x1t}=0$；而法向力 Y_1 及侧向力 Z_1 作用于压心，并不通过质心，故它们分别对导弹质心将产生俯仰稳定力矩 M_{z1t} 和偏航稳定力矩 M_{y1t}。于是由图 5-8(a)得气动力 $\boldsymbol{R}$ 对弹体坐标系各轴之力矩为

$$\begin{cases} M_{x1t} = 0 \\ M_{y1t} = Z_1(x_y - x_z) \\ M_{z1t} = -Y_1(x_y - x_z) \end{cases} \tag{5-3.2}$$

式中，x_z、x_y 分别为导弹质心和压心到理论尖端的距离。

将关系式

$$\begin{cases} Y_1 = C_{y1}^{\alpha} \alpha q S_m = C_n^{\alpha} \alpha q S_m \\ Z_1 = C_{z1}^{\beta} \beta q S_m = -C_n^{\alpha} \beta q S_m \end{cases}$$

代入(5-3.2)式，得气动稳定偏航及俯仰力矩表达式

$$\begin{cases} M_{y1t} = -C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)\beta \\ M_{z1t} = -C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)\alpha \end{cases} \tag{5-3.3}$$

引入压心和质心至导弹理论尖端的距离对弹长 l_k 之比的无因次量

$$\bar{x}_y = x_y / l_k$$

$$\bar{x}_z = x_z / l_k$$

时，则力矩表达式(5-3.3)成为

$$\begin{cases} M_{y1t} = -C_n^{\alpha}(\bar{x}_y - \bar{x}_z) q S_m l_k \beta = m_{y1}^{\beta} q S_m l_k \beta \\ M_{z1t} = -C_n^{\alpha}(\bar{x}_y - \bar{x}_z) q S_m l_k \alpha = m_{z1}^{\beta} q S_m l_k \alpha \end{cases} \tag{5-3.4}$$

式中，$m_{y1}^{\beta} = -C_n^{\alpha}(\bar{x}_y - \bar{x}_z) = m_{z1}^{\alpha}$，$m_{z1}^{\alpha}$ 和 m_{y1}^{β} 分别称为俯仰及偏航力矩系数导数（或梯度）。

图 5-8(b)和(c)分别为某有尾翼和无尾翼导弹压心和质心无因子随时间变化的曲

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

线。

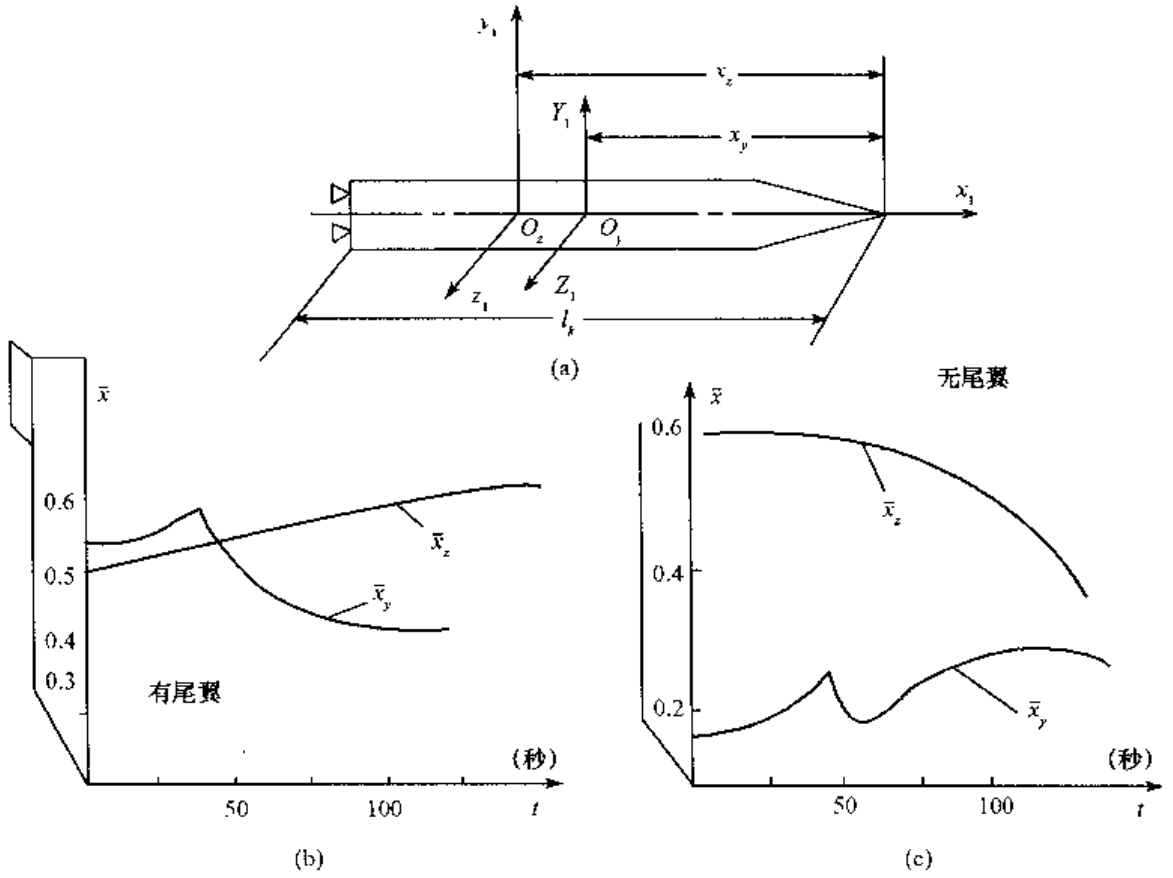


图 5-8

在现代的空气动力实验和弹道计算中，也常常将空气动力矩矢 M_t 沿总攻角坐标系三坐标轴方向进行分解，其空气动力矩系数表达式与式(5-2.19)相似，因此这里不再详细给出。

5.3.2 气动静稳定性和静不稳定性

由式(5-3.4)知，因为法向力系数导数 C_n^α 总是大于零的，所以 m_{z1}^α 的符号完全取决于压心与质心的相对位置 $\bar{x}_y$ 和 $\bar{x}_z$ 的数值。若压心在质心之后，即 $\bar{x}_y > \bar{x}_z$，则 $m_{z1}^\alpha(m_{y1}^\beta) < 0$，将产生与欧拉角 $\alpha(\beta)$ 反号的俯仰(偏航)力矩。当导弹在飞行中出现干扰 $\Delta\alpha$、$\Delta\beta$ 时，力矩 M_{z1t} 和 M_{y1t} 使得导弹分别绕 z_1 轴、y_1 轴旋转来消除 $\Delta\alpha$、$\Delta\beta$ 角，此时，我们称导弹是静稳定的，称 M_{z1t}、M_{y1t} 为静稳定力矩；相反，若压心在质心之前，即 $\bar{x}_y < \bar{x}_z$，则 $m_{z1}^\alpha(m_{y1}^\beta) > 0$，必将产生与欧拉角 $\alpha(\beta)$ 同号的俯仰(偏航)力矩，故当出现 $\Delta\alpha$、$\Delta\beta$ 时，力矩 M_{z1t} 和 M_{y1t} 将使导弹绕 z_1、y_1 轴旋转造成 $\Delta\alpha$、$\Delta\beta$ 继续增大，此时，我们称导弹是静不稳定的，并将这两个力矩称为静不稳定力矩。无量纲量 $(\bar{x}_y - \bar{x}_z)$ 称为稳定裕度。当该值为负且绝对值较大时，对导弹稳定性有好处，但它也会导致其结构上有较大的弯矩，这对于大型运载火箭是不允许的。需强调指出，静稳定性是指导弹在不加控制情况下的一种空气动力特性。实

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

际上，对于静不稳定导弹而言，只要控制系统设计得当，导弹在控制力作用下，仍可稳定飞行。因此，不要将导弹的固有空气动力静稳定性与控制系统作用下的操纵稳定性相混淆。

压心的位置是通过气动计算和风洞实验确定的，而质心的位置则可通过具体导弹的质量分布和剩余燃料的质量位置计算得到。

5.3.3 阻尼力矩

导弹在运动中有转动时，存在有大气的阻尼，表现为阻止转动的空气动力矩，这一力矩称为阻尼力矩。该力矩的方向总是与导弹转动方向相反，始终对转动运动的导弹起阻尼作用。

以俯仰阻尼力矩为例讨论气动阻尼力矩产生的机理及数学表达式的问题。若导弹以零冲角和速度 V 飞行，同时以角速度 ω_{z1} 转动时(图 5-9)，则在距质心$(x_z - x)$处的单元长度有线速度为 $\omega_{z1}(x_z - x)$，该线速度与导弹运动速度 V 组合成新的速度，这就产生了局部迎角 $\Delta\alpha$。图 5-9 表示了 $\Delta\alpha < 0(x < x_z)$及 $\Delta\alpha > 0(x > x_z)$两种情况。从图中就不难理解

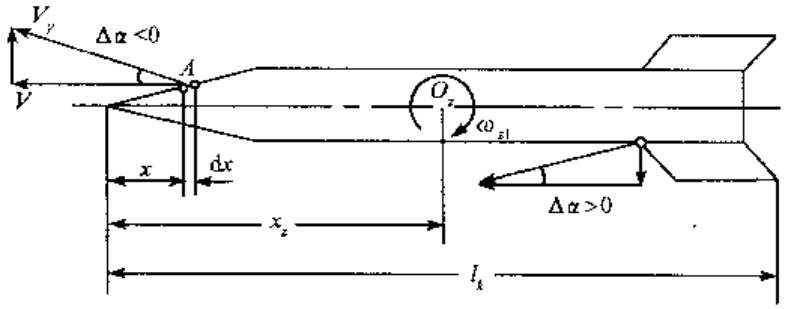


图 5-9

$$\mathrm{tg}\Delta\alpha = \frac{\omega_{z1}(x - x_z)}{V}$$

因 $\Delta\alpha$ 很小，可近似认为

$$\Delta\alpha = \frac{\omega_{z1}(x - x_z)}{V} \tag{5-3.5}$$

对质心产生的附加力矩为

$$\mathrm{d}M_{z1d} = -C^{\alpha}_{y1sec}\Delta\alpha qS_m(x - x_z)\mathrm{d}x \tag{5-3.6}$$

其中，C^{α}_{y1sec} 为长度方向上某一单位长度的法向力系数对 α 的导数。

将全弹各局部的空气动力矩总和起来，即可求得导弹的俯仰阻尼力矩为

$$M_{z1d} = m^{\bar{\omega}}_{z1}qS_m l_k \bar{\omega}_{z1} \tag{5-3.7}$$

其中

$\bar{\omega}_{z1} = \dfrac{l_k\omega_{z1}}{V}$ 称为无因次俯仰角速度；

$m^{\bar{\omega}}_{z1} = -\int_0^{l_k} C^{\alpha}_{y1sec}\left(\dfrac{x_z - x}{l_k}\right)^2\mathrm{d}x$ 称为俯仰阻尼力矩系数导数，符号始终为负，而其值则

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

由实验确定。

同理，可得偏航阻尼力矩表达式

$$M_{y1d} = m_{y1}^{\bar{\omega}} qS_m l_k \bar{\omega}_{y1} \tag{5-3.8}$$

其中 $\bar{\omega}_{y1} = \frac{l_k \omega_{y1}}{V}$ 称为无因次偏航角速度；

$m_{y1}^{\bar{\omega}}$ 为偏航阻尼力矩系数导数，符号恒为负，其数值由实验确定。

对于轴对称导弹，$m_{y1}^{\bar{\omega}} = m_{z1}^{\bar{\omega}}$，故偏航阻尼力矩也可写成

$$M_{y1d} = m_{z1}^{\bar{\omega}} qS_m l_k \bar{\omega}_{y1} \tag{5-3.9}$$

当导弹以角速度 ω_{x1} 绕纵轴 x_1 滚转时，也将产生附加的滚动阻尼力矩。由于导弹系一细长轴对称体，因而其滚动阻尼力矩主要是由尺寸大的尾翼产生的，同时空气粘性对弹体也将产生不太大的摩擦阻尼力矩。

滚动阻尼力矩系数也可写成

$$M_{x1d} = m_{x1}^{\bar{\omega}} qS_m l_k \bar{\omega}_{x1} \tag{5-3.10}$$

其中 $\bar{\omega}_{x1} = \frac{l_k \omega_{x1}}{V}$ 为无因次的滚转角速度；

$m_{x1}^{\bar{\omega}}$ 为滚动阻尼力矩系数导数，符号恒为负，其值可由实验确定。

滚动阻尼力矩较俯仰和偏航阻尼力矩要小得多，它们相应的力矩系数的绝对值之比，对某些导弹而言约为 1:100。

综上所述，导弹在大气中飞行并伴随有转动运动时，在承受气动稳定力矩的同时，必然要受到气动阻尼力矩的作用，而阻尼力矩的大小，直接影响着导弹飞行的动态特性。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第六章　弹道导弹的主动段运动

前面几章中，已经讨论了作用于导弹上的力和力矩以及弹道学中的一些基本知识。在此基础上，我们来建立描述弹道导弹运动规律的数学模型，并对其运动特性进行分析。根据导弹飞行中有无控制作用和受力特点，可将整个弹道分为主动段和被动段两部分，相应地，描述导弹运动规律的微分方程也就有主动段和被动段运动方程之分。弹道导弹的运动方程比较复杂，它不仅与导弹的级数及动力装置有关，而且也随着控制系统结构形式、射程远近、射击精度指标要求和坐标系选取的不同而不同。这一章里，我们仅讨论弹道导弹主动段运动微分方程组的建立方法及导弹的运动规律。被动段运动微分方程组的建立将放在第七章中进行讨论。

§6.1　变质量力学基本定理

从导弹的飞行过程我们知道，要将重达几百吨的导弹，在较短的时间内推进到相当的高度，并获得比音速大几倍到几十倍的飞行速度，这不仅要求火箭发动机在主动段连续工作，而且要求它能产生较大的推力。相应地，发动机就需要消耗大量的燃料，从而引起导弹质量的较大变化；此外，当导弹再入大气层后，由于末制导动力装置或姿态控制动力装置中的燃料消耗、气动加热对壳体的烧蚀、防热冷却系统工质的消耗以及突防物的释放等也都会引起导弹质量的变化，因此，导弹是一质量不断随时间变化的变质量物体（即变质量质点系）。而研究变质量质点系的动力学问题，应用变质量动力学理论更为方便。

应当指出，研究变质量动力学问题也可应用常质量的力学定律，但此时必须把在一个微小时间 dt 内的基本质量和该时刻分离出去的质量合在一起当成一个常质量质点系，然后才能应用常质量质点系动力学的有关定理进行处理。

此外还应指出，在粗略研究时，我们还可以把变质量的导弹当作一个可变质量的质点，建立变质量质点的基本方程。但在精确研究时，则必须把导弹当作一个多相（固相、液相和气相）的变质量质点系来考虑。

为便于今后建立导弹运动方程，下面我们就来讨论变质量质点及变质量质点系的一些基本定理。

6.1.1　变质量质点基本定理

据上所述，导弹本是一个由众多质量的质点所组成的变质量质点系，而将这个变质量的质点系视为一变质量的质点来考虑，实质上是假定：

(1)不考虑导弹上各点的速度差异；

(2)不考虑导弹质心因燃料消耗而产生的位移；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(3)作用于导弹上的所有外力都通过质心,也就是说,不计导弹在飞行过程中绕其质心的转动。

在上述假设下,完全可将导弹看成是一个质量随时间变化的可分割的几何点。下面我们就来研究这样一个质点相对于某一静止坐标系的运动。

假设 t 时刻质点 P 的质量为 $m(t)$,而其在外力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的绝对速度为 $\boldsymbol{V}(t)$(图 6-1)时,则其动量可表为

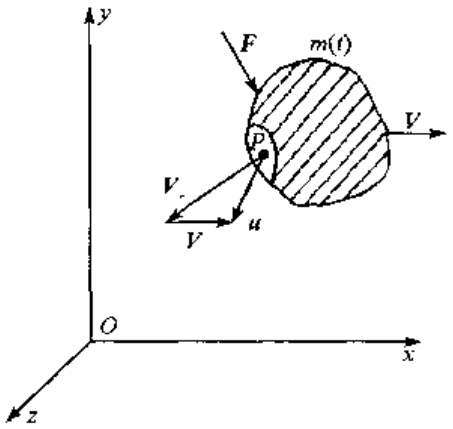


图 6-1

$$\boldsymbol{Q}(t) = m\boldsymbol{V}(t) \tag{6-1.1}$$

若在 $\mathrm{d}t$ 时间内质点 P 以相对速度 $\boldsymbol{V}_r$ 流出微质量 $-\mathrm{d}m$,则 $t+\mathrm{d}t$ 时质点(基本质点 + 放出的微质点)的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(t+\mathrm{d}t) &= [m-(-\mathrm{d}m)]\\ &(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V})+(-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_r)\end{aligned} \tag{6-1.2}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{V}$ 为 $\mathrm{d}t$ 时间内力 $\boldsymbol{F}$ 以及放出微质点过程中所引起的速度增量;$(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_r)$ 为 $\mathrm{d}t$ 时间内流出微质量的绝对速度。

因此,$\mathrm{d}t$ 时间内系统的动量改变量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{Q}(t+\mathrm{d}t)-\boldsymbol{Q}(t)\\ &= m\mathrm{d}\boldsymbol{V}-\mathrm{d}m\boldsymbol{V}_r\end{aligned} \tag{6-1.3}$$

根据常质量质点动量定理,即"动量在某方向上对时间的变化率等于该方向上的作用力"原理,上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{Q}(t+\mathrm{d}t)-\boldsymbol{Q}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

或

$$\frac{m\mathrm{d}\boldsymbol{V}-\mathrm{d}m\boldsymbol{V}_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

因此得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_r \tag{6-1.4}$$

该式说明:变质量质点的基本质点所具有的惯性力等于外作用力及其流出质点质量对时

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

间的变化率与流出质点相对速度乘积的矢量和。这就是变质量质点的基本定理，或称变质量质点的动量定理，而(6－1.4)式则称密歇尔斯基方程。

当$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=0$，即导弹相对静止坐标系不运动或作等速直线运动时，则(6－1.4)式变成

$$\boldsymbol{F}=-\frac{dm}{dt}\boldsymbol{V}_r$$

令

$$\boldsymbol{P}'_r=-\boldsymbol{F}$$

时，则

$$\boldsymbol{P}'_r=\frac{dm}{dt}\boldsymbol{V}_r \tag{6-1.5}$$

由于$\boldsymbol{P}'_r$具有力的量纲，且$\frac{dm}{dt}<0$，因此P'_r与流出质量的相对速度$\boldsymbol{V}_r$反向，故称$\boldsymbol{P}'_r$为喷射反作用力。导弹正是由于此反作用力的作用才得以向前推进的。于是，(6－1.4)式又可写成

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}'_r \tag{6-1.6}$$

由上式看出，如果在变质量质点上加上喷射反作用力，即将喷射反作用力视为作用于变质量质点上的一种外力，则变质量质点运动微分方程的形式就与惯性系统中直接按牛顿第二定律写出的运动微分方程完全一致了。这给我们一个启示：如果将变质量质点流出或流入的质量所产生的喷射反作用力视为外力时，则变质量质点的力学问题完全可按常质量质点来处理。

如果变质量质点不受外力作用，即$\boldsymbol{F}=0$，则(6－1.6)式可写成标量形式

$$m\frac{dV}{dt}=-V_r\frac{dm}{dt}$$

或

$$dV=-V_r\frac{dm}{m} \tag{6-1.7}$$

对于火箭发动机来说，通常认为燃气喷射速度V_r系一不变量，其数量级均为2000m/s。这样，质点P的绝对速度V便可积分求出

$$\int_{V_0}^{V}dV=-V_r\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

即

$$V=V_0+V_r\ln\frac{m_0}{m} \tag{6-1.8}$$

式中V_0、m_0分别为$t=t_0$时的速度和质量，称为初始速度和初始质量。

当$V_0=0$时

$$\frac{V}{V_r}=\ln\frac{m_0}{m} \tag{6-1.9}$$

再令

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\mu = \frac{m}{m_0}$$

则上式表为

$$V = -V_r \ln\mu \tag{6-1.10}$$

式中 μ 为导弹任一时刻的质量与其初始质量之比，简称变质量质点的质量比。

通常，将外力 $\boldsymbol{F} = 0$ 时的变质量质点的速度称为理想速度，或称为齐奥尔科夫斯基速度，而(6-1.10)式则称为齐奥尔科夫斯基公式，它常常被用来计算导弹主动段终点的理想速度(仅由喷射反作用力产生的速度)，即

$$V_k = -V_r \ln\mu_k \tag{6-1.11}$$

式中，$\mu_k = \frac{m_k}{m_0} < 1$ 称为导弹主动段终点的质量比；$m_k = m_0 - m_T$ 为导弹主动段终点处的质量，m_T 为导弹主动段推进剂质量消耗量。

从上式我们不难得出结论：

(1) 当发动机熄火时，导弹的理想速度仅与燃气喷射速度 V_r 与主动段终点的质量比 μ_k 有关；

(2) 燃气喷射速度 V_r 越大，理想速度 V_k 也越大，反之则反；

(3) 导弹主动段终点的质量比 μ_k 越小，其理想速度 V_k 越大，反之则反。

这就是说，增大导弹的燃气喷射速度或减少其主动段终点的质量比 μ_k，均可使导弹主动段终点处的理想速度增大。但实际证明，用增大燃气喷射速度来增大理想速度的方法要比用增大燃料的相对储备量 $\frac{m_0}{m}$ 以减小 μ_k 来增大 V_k 更有效。这就难怪人们热衷于新型推进剂的研制和不断改进火箭发动机设计的客观现实了。

6.1.2 变质量质点系的动量定理和动量矩定理

前已述及，导弹不是一个具有一定质量的质点，而是一个有一定几何形状的变质量质点系。它由一定质量的固体、液体和气体物质的质点所组成，而且每一种物质质点的运动速度又不尽相同。具体说来，弹体和各种零部件可视为固体质点，它们随同导弹一起作牵连运动；而对工作着的发动机系统来说，流动着的液体和气体质点除有随同弹体一起运动的牵连运动外，还有相对于弹体的相对运动，因而导弹质心必然存在相对于弹体的相对运动；另外作用于导弹上的所有外力(引力、空气动力、控制力等)也并不都是通过质心，即各外力对其质心的合外力矩并不等于零。因此，在精确计算时，应该把导弹看作一个质量非常值的、合外力矩不为零的变质量的质点系。这就是说，变质量质点系的动量定理与变质量质点的动量定理将有所不同，其主要区别在于前者考虑了部分质点的相对运动和合外力矩对导弹的影响问题。

1. 动量定理

设某瞬时作用在整个导弹上的合外力为 $\boldsymbol{F}$，而导弹的总质量 m 为各质点质量 m_i 的总和

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$m = \sum m_i$$

时,则其动量可表为

$$\boldsymbol{Q} = \sum m_i \boldsymbol{V}_i$$

其中 $\boldsymbol{V}_i$ 是第 i 个质点相对于某一惯性坐标系的速度,其可表成相对于弹体的相对速度 $\boldsymbol{V}_{ri}$ 与随同弹体运动的牵连速度 $\boldsymbol{V}_{ei}$ 之矢量和

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_{ri} + \boldsymbol{V}_{ei}$$

而加速度则可表示为相对加速度 $\boldsymbol{a}_{ri}$、牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{ai}$ 和柯氏加速度 $\boldsymbol{a}_{ki}$ 之矢量和

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{ri} + \boldsymbol{a}_{ai} + \boldsymbol{a}_{ki}$$

在瞬时 $t_1 = t + \mathrm{d}t$ 时已有部分质点被喷出体外,下面我们就来研究 t_1 时刻包含被喷出质点在内的质点系动力学问题。显然,在时间 t 到 t_1 的过程中,这一质点系是常质量系,因而根据常质量质点系的动量定理,可有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \boldsymbol{V}_i\right) = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_i}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}$$

即

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri} + \sum m_i \boldsymbol{a}_{ai} + \sum m_i \boldsymbol{a}_{ki} = \boldsymbol{F} \tag{6-1.12}$$

为进一步阐明上式的力学意义,我们有必要对其左端各项分别进行讨论。

(1) $\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri}$

从力学观点看,该项是对于弹体具有相对运动质点质量的动量变化率。由导弹主动段飞行过程可以清楚地看出,只有位于推进剂箱和管道中的液体以及发动机内的推进剂液体和气体质点才有相对于弹体的相对运动。今设在 t 和 $t + \delta t$ 瞬时各质点的相对速度为 $\boldsymbol{V}_{ri}$ 和 $\boldsymbol{V}_{r_1 i}$,则在时间 δt 内相对速度之变化可表为

$$\delta \boldsymbol{V}_{ri} = \boldsymbol{V}_{r_1 i} - \boldsymbol{V}_{ri} = \boldsymbol{a}_{ri}\delta t$$

而其引起的动量变化为

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri}\delta t = \sum m_i \boldsymbol{V}_{r_1 i} - \sum m_i \boldsymbol{V}_{ri} = \sum m_i \boldsymbol{V}_{r_1 i} - \boldsymbol{Q}_r \tag{6-1.13}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_r = \sum m_i \boldsymbol{V}_{ri}$ 是瞬时 t 位于导弹内相对弹体流动的各质点的相对动量矢和。至于 $\sum m_i \boldsymbol{V}_{r_1 i}$ 则可分为两部分质点的相对动量矢和,其中一部分为瞬时位于导弹内相对流动的各质点质量的相对动量矢和 $\boldsymbol{Q}_{r_1}$,而另一部分则为 δt 时间内喷出弹体外的各质点质量相对动量 $\sum m_j \boldsymbol{V}_{rj}$,即有

$$\sum m_i \boldsymbol{V}_{r_1 i} = \boldsymbol{Q}_{r_1} + \sum m_j \boldsymbol{V}_{rj} \tag{6-1.14}$$

其中,$\boldsymbol{V}_{rj}$ 为第 j 个质点相对弹体的速度,即排气速度。

将上式代入(6-1.13)式,则有

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri}\delta t = \boldsymbol{Q}_{r_1} - \boldsymbol{Q}_r + \sum m_j \boldsymbol{V}_{rj}$$

上式两边同除以 δt,并取 $\delta t \to 0$ 时之极限,则得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{Q}_{r_1} - \boldsymbol{Q}_r}{\delta t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{\sum m_j \boldsymbol{V}_{rj}}{\delta t}$$

即

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ri} = \frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t} + \boldsymbol{P}_r \tag{6-1.15}$$

其中，第一项$\frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t}$为导弹体内介质质点相对运动为非定常时所引起的动量变化率，称为变分力或变体力。如果介质相对运动为定常的，或者说，相对于弹体静止的每一点上的介质的密度及其相对速度不随时间变化时，则变分力为零。而 $\boldsymbol{P}_r$ 为作用在介质上的喷射力

$$\boldsymbol{P}_r = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\sum m_j \boldsymbol{V}_{rj}}{\delta t} \tag{6-1.16}$$

如果认为发动机喷口截面处的燃气喷射速度 $\boldsymbol{V}_{rj}$ 均相同，且用符号 $\boldsymbol{u}_e$ 代替 $\boldsymbol{V}_{rj}$，则因喷射速度而引起的喷射力 $\boldsymbol{P}_r$ 可表成

$$\boldsymbol{P}_r = \dot{m}\boldsymbol{u}_e \tag{6-1.17}$$

式中 $\boldsymbol{u}_e$ 在喷射技术中，通常称为喷口排气速度；$\dot{m} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 为发动机推进剂的质量秒消耗量。

(2) $\sum m_i \boldsymbol{a}_{ki}$

由于柯氏加速度 $\boldsymbol{a}_{ki}$ 可表为弹体转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 与介质质点相对弹体的运动速度 $\boldsymbol{V}_{ri}$ 之关系

$$\boldsymbol{a}_{ki} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{V}_{ri}$$

因而，$\sum m_i \boldsymbol{a}_{ki}$ 实际上就是弹体内部介质相对以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动的弹体流动而引起的柯氏惯性力

$$\boldsymbol{F}_k = -\sum m_i \boldsymbol{a}_{ki} \tag{6-1.18}$$

(3) $\sum m_i \boldsymbol{a}_{ei}$

$\boldsymbol{a}_{ei}$ 是导弹内介质质点随同导弹一起运动时的牵连加速度，导弹中的每个质点均具有此加速度。由质点复合运动定理可知，导弹上任一点 M(图 6-2) 的牵连速度和加速度可分别表为

$$\boldsymbol{V}_{er} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_{01}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{ei}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_{01}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_{01}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{V}_{ri} \\ &= \boldsymbol{a}_{ei} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{V}_{ri}\end{aligned}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

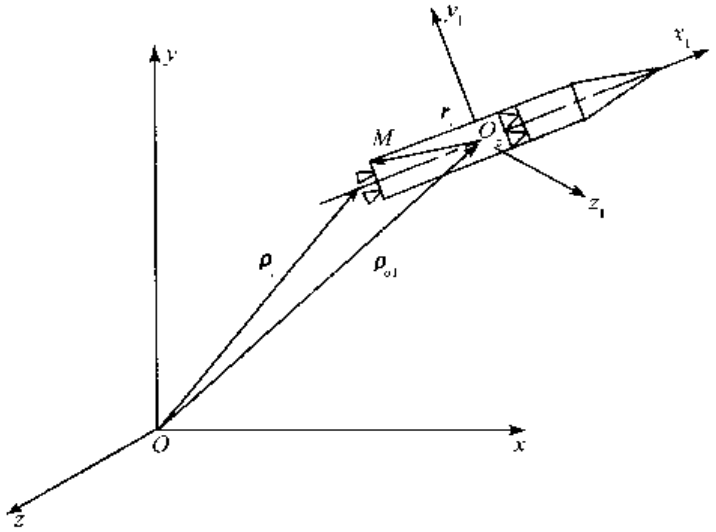


图 6 - 2

式中 $\boldsymbol{\rho}_{01}$ 为导弹质心 O_s 相对静止坐标系的矢径，$\boldsymbol{r}_i$ 为 M 点在弹体坐标系内的矢径，$\boldsymbol{V}_{ri}=\frac{\delta \boldsymbol{r}_i}{\delta t}$ 为质点相对于弹体的相对速度，而 $\boldsymbol{a}_{ei}$ 即为牵连加速度

$$\boldsymbol{a}_{ei}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_{01}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{r}_i) \tag{6-1.19}$$

该加速度是随同弹体一起运动的每一个质点都具有的，它系指与运动质点相重合的坐标系上那一点的瞬时加速度。显然，因为有部分质点有相对运动，所以 $\boldsymbol{a}_{ei}$ 并不完全等于 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{ei}}{\mathrm{d}t}$，而只是 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{ei}}{\mathrm{d}t}$ 中的一部分，即

$$\boldsymbol{a}_{ei}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{ei}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{V}_{ri}$$

实际上，牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{ei}$ 可以看成是“固化刚体”（或称虚构刚体）上一点的绝对加速度（“固化刚体”是指 t 瞬时导弹内各相对运动的质点“固化”了的刚体）。这样一来，固化刚体上某一点处绝对速度 $\boldsymbol{V}_{is}$（脚标“s”表示固化刚体）对时间的导数，即绝对加速度，也就是实际导弹上该点的牵连加速度，即有

$$\boldsymbol{a}_{ei}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{is}}{\mathrm{d}t}$$

因此

$$\sum m_i\boldsymbol{a}_{ei}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{is}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_s}{\mathrm{d}t} \tag{6-1.20}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_s=\sum m_i\boldsymbol{V}_{is}$ 称为固化刚体的动量。

这样，(6 - 1.12) 式左端的第二项 $\sum m_i\boldsymbol{a}_{ei}$ 实际为“固化刚体”所具有的动量对时间的变化率。

当将(6 - 1.15)、(6 - 1.18) 和(6 - 1.20) 式代入(6 - 1.12) 式，则有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k - \boldsymbol{P}_r - \frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t} \tag{6-1.21}$$

由于喷射反作用力 $-\boldsymbol{P}_r$ 及相对运动不定常而引起的变分力都是由相对运动引起的，因此，常将此二力统称为相对力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$，即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} = -\boldsymbol{P}_r - \frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t}$$

这样，(6-1.21) 式又可表为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} \tag{6-1.22}$$

这就是普遍情况下的变质量质点系动量定理的数学表达式。它说明瞬时 t 固化了的变质量质点系(固化刚体)的动量 $\boldsymbol{Q}_s$ 对时间的导数等于作用于变质量质点系上的外力 $\boldsymbol{F}$、柯氏惯性力 $\boldsymbol{F}_k$ 和相对力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$ 的矢量和。

由此可见，变质量质点系的动量定理在形式上完全类似于在力系 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$ 作用下的常质量刚体的动量定理。换言之，只要把相对运动时引起的柯氏惯性力 $\boldsymbol{F}_k$ 和相对力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$ 一同作为作用于导弹上的外力，那么，我们就可以直接利用常质量质点系(常值刚体)的动量定理研究它的运动了。

比较(6-1.6)与(6-1.21)两式可知，后式与前式的差别只在于多了 $\boldsymbol{F}_k$ 与 $-\frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t}$ 两项，这完全是由于位于弹体内相对运动介质的非定常流动和考虑导弹相对转动情况下而产生的。如果不考虑 $\boldsymbol{F}_k$ 及 $-\frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t}$ 的影响(即认为弹体内相对运动介质为定常流动及导弹只有平动而无绕其质心的相对转动)，那么，变质量质点系动量定理即成为变质量质点动量定理了。今后我们就是在这样的情况下，利用变质量质点系动量定理来建立导弹的质心运动微分方程的。

2. 动量矩定理

变质量质点系动量矩定理的建立方法完全类似于其动量定理的建立方法。我们知道，常质量质点系的动量矩定理可表为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为质点系的总动量矩矢，$\boldsymbol{M}$ 为作用于质点系的外力矩矢。

对静止坐标系和对通过质心并与静止坐标系相平行的平移坐标系的动量矩定理，形式上与上式是相同的，只是在计算其动量矩和力矩时要取不同的基点而已。

变质量质点系动量矩定理形式上与常质量质点系动量矩定理相同，即瞬时固化了的变质量质点系(固化刚体)的动量矩 $\boldsymbol{K}_s$ 对时间的导数等于作用于该变质量质点系的外力矩 $\boldsymbol{M}$、柯氏惯性力矩 $\boldsymbol{M}_k$ 和相对力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}}$ 的矢量和，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}} \tag{6-1.23}$$

为了计算方便，常采用通过质心的平移坐标系，因此 $\boldsymbol{K}_s$ 又可表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\boldsymbol{K}_s = \sum (m_i \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}) \tag{6-1.24}$$

它表示 t 瞬时的固化刚体相对于平移坐标系运动时质心的动量矩；

$\boldsymbol{M}$ 为作用于固化刚体导弹上的外力对质心的主矩；

$\boldsymbol{M}_k$ 为柯氏惯性力对固化刚体质心的主矩；

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}}$ 为相对力对固化刚体质心的主矩，即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}} = -\boldsymbol{M}_{pr} - \frac{\delta \boldsymbol{K}_r}{\delta t} \tag{6-1.25}$$

$-\boldsymbol{M}_{pr}$ 为喷射反作用力 $-\boldsymbol{P}_r$ 对质心的主矩；

$-\frac{\delta \boldsymbol{K}_r}{\delta t}$ 为非定常相对流动引起的附加反作用力(变分力) $-\frac{\delta \boldsymbol{Q}_r}{\delta t}$ 对质心的主矩。

6.1.3 导弹质心运动和绕质心运动方程

作为变质量物体的导弹，其动力学方程可由导出的变质量质点系动量定理和动量矩定理直接建立其质心运动方程和绕质心运动方程。

1. 质心运动方程

由变质量质点系动量定理，可直接写出固化导弹之动量随时间的变化率与各力间的关系式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} \tag{6-1.26}$$

若令

$$\boldsymbol{Q}_s = m\boldsymbol{V}_{cs}$$

时，则得

$$m\boldsymbol{a}_{cs} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} \tag{6-1.27}$$

这里 $\boldsymbol{V}_{cs}$ 和 $\boldsymbol{a}_{cs}$ 是瞬时 t 固化导弹的质心速度和加速度，即相当于质心随同弹体一起运动的牵连速度和牵连加速度。当考虑到推进剂消耗时，导弹质心将相对于弹体移动，因此导弹质心的绝对速度 $\boldsymbol{V}_{cm}$ 和绝对加速度 $\boldsymbol{a}_{cm}$ 应为

$$\boldsymbol{V}_{cm} = \boldsymbol{V}_{cs} + \boldsymbol{V}_{rc}$$

和

$$\boldsymbol{a}_{cm} = \boldsymbol{a}_{cs} + \boldsymbol{a}_{rc} + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{V}_{rc}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}_1$ 为导弹的转动角速度；

$\boldsymbol{V}_{rc}$，$\boldsymbol{a}_{rc}$ 为导弹质心相对弹体移动的速度和加速度，即相对速度和相对加速度。这样，导弹质心运动方程为

$$m\boldsymbol{a}_{cm} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} + m\boldsymbol{a}_{rc} + 2m\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{V}_{rc} \tag{6-1.28}$$

对弹道导弹来说，由于质心相对移动的速度和加速度很小，因而实际上最后两项完全可以略去。当然，为精确起见，也可以在计算相对力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$ 和柯氏惯性力 $\boldsymbol{F}_k$ 时分别将这两项计入。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

2. 绕质心运动方程

由变质量质点系动量矩定理,很容易导出导弹绕质心的运动方程。

事实上,根据变质量质点系动量矩定理,导弹绕质心运动方程可直接写成如(6-1.23)式的形式。当瞬时固化刚体相对于过质心的平移坐标系转动时,其对质心的动量矩则可表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_c &= \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i) \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{r}_i)\end{aligned} \tag{6-1.29}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_1$ 为弹体相对平移坐标系的转动角速度矢。若它在与弹体固联的某一坐标系三轴上的分量分别为 ω_{x_1}、ω_{y_1} 及 ω_{z_1},则其矩阵式为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix}$$

如果把转动惯量定义为

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

其中九个元素称为惯量系数,分别为对各动坐标系轴的转动惯量和惯量积。当计及导弹的轴对称特性时,则 $\dot{\boldsymbol{I}}$ 各分量表为

$$\begin{cases} I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ I_{xy} = I_{yx} = \sum m_i x_i y_i \\ I_{yz} = I_{zy} = \sum m_i y_i z_i \\ I_{zx} = I_{xz} = \sum m_i x_i z_i \end{cases}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{I}}$ 和任一矢量的点积是一个新的矢量,故 $\dot{\boldsymbol{I}}$ 上加以矢量符号。

这样,动量矩 $\boldsymbol{K}_c$ 可表为

$$\boldsymbol{K}_c = \dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \tag{6-1.30}$$

或

$$\begin{bmatrix} K_{cx} \\ K_{cy} \\ K_{cz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix}$$

将(6-1.30)式对时间求导数,则得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta(\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \tag{6-1.31}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中$\frac{\delta}{\delta t}$表示局部导数。

因为$\boldsymbol{K}_c$是瞬时t固化导弹相对平移坐标系转动时质心的动量矩，而动坐标系又与弹体固联，故

$$\frac{\delta}{\delta t}(\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \dot{\boldsymbol{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t}$$

最后，利用变质量质点系动量矩定理表达式就可得导弹绕其质心运动时的矢量表达式

$$\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}} \qquad (6-1.32)$$

显然，如果动坐标系采用中心惯性主轴坐标系时，则所有惯量积项均将为零，这样在计算时就更为方便了。

应当指出，上面依据变质量质点系的动量和动量矩定理而导出的导弹质心运动方程及其绕质心的转动方程，将在以后几节里建立导弹主动段运动方程组时用到，因此首先予以讨论。

§6.2 主动段运动微分方程组的一般形式

弹道导弹的控制系统通常为惯性控制系统，在飞行中它所测出的参数自然是相对惯性参考系的，按理在惯性坐标系内建立导弹的运动微分方程组是较为适宜的。但是，弹道导弹毕竟是在地面上发射和摧毁地面目标的，它在飞行中的运动姿态、射击距离以及落点精度等，人们也总是相对地球而衡量的。因此习惯上，导弹的运动微分方程组一般是建立在发射坐标系内的，当然也可以在轨迹坐标系和惯性坐标系内建立。

导弹的飞行，除了质心的移动外，还有绕质心的转动。考虑到弹道导弹主动段受控和受力特点，其运动微分方程组应由质心运动和绕质心运动的动力学方程和运动学方程、控制方程以及欧拉角联系方程等组成。这一节只着重介绍弹道导弹主动段运动微分方程组一般形式的建立方法。

6.2.1 质心运动方程

在变质量力学基本定理一节中，我们已导出惯性坐标系中的导弹质心运动方程的一般形式

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{cm}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}_k$$

其中$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{cm}}{\mathrm{d}t}$为导弹质心相对惯性坐标系的加速度。如果将其换成相对发射坐标系的相对加速度，则应在方程右端加上因地球自转引起的牵连惯性力$\boldsymbol{F}_e$和柯氏惯性力$\boldsymbol{F}_c$，即

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c$$

其中，$\boldsymbol{F}$为外力；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}$为相对力，即喷射反作用力；$\boldsymbol{F}_k$为转动弹体内流动物质相对弹体流动

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

时引起的柯氏惯性力。引入推力 $\boldsymbol{P}$ 概念并将外力 $\boldsymbol{F}$ 具体地用地球引力 $\boldsymbol{G}$、空气动力 $\boldsymbol{R}$ 以及控制力 $\boldsymbol{P}_1$ 表示时，则导弹质心相对发射坐标系的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_c \tag{6-2.1}$$

或投影式

$$m\frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}t} = P_j + P_{1j} + R_j + G_j + F_{cj} + F_{cj} \qquad (j = x, y, z) \tag{6-2.2}$$

式中诸力各分量可由其所在的坐标系与发射坐标系间的方向余弦关系得到。

1. *发动机推力分量 P_j 和控制力分量 P_{1j}*

发动机推力分量 P_j 为发动机有效推力 $\boldsymbol{P}_e$ 在发射坐标系各轴上的投影，而 $\boldsymbol{P}_e$ 是与弹体纵对称轴 x_1 方向一致的，其表达式可由发射坐标系与弹体坐标系间关系给出。控制力则包括法向控制力 P_{y_1} 和横向控制力 P_{z_1}，其简化式可由(3－2.3)或(3－2.15)式给出。因此，由发射坐标系与弹体坐标系间的方向余弦关系(2－2.4)，即可得发动机推力和控制力在发射坐标系各轴上的分量式

$$\begin{bmatrix} P_x + P_{1x} \\ P_y + P_{1y} \\ P_z + P_{1z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma \\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma \\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e \\ R'\delta_\varphi \\ -R'\delta_\psi \end{bmatrix} \tag{6-2.3}$$

2. *空气动力分量 R_j*

总空气动力 $\boldsymbol{R}$ 在速度坐标系内的三分量(阻力、升力和侧力)已由(5—2.2)式给出，即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = qS_m \begin{bmatrix} C_x \\ C_y^\alpha\alpha \\ -C_y^\beta\beta \end{bmatrix}$$

因此，它们在发射坐标系中的分量可借助于发射坐标系与速度坐标系间的方向余弦关系矩阵式(2－4.1)得出，即

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{6-2.4}$$

3. *地球引力分量 G_j*

地球引力 $\boldsymbol{G}$ 在发射坐标系各轴上的分量为

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \tag{6-2.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中，g_j 为引力加速度 $\boldsymbol{g}$ 在发射坐标系各轴上的分量。当地球为圆球体时

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = -g\begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\tilde{R}+y}{r} \\ \dfrac{z}{r} \end{bmatrix}$$

其中

$$g = g_0\left(\frac{\tilde{R}}{r}\right)^2 = \frac{fM}{r^2}$$

而当地球为正常地球椭球体时，则为

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \frac{g_r}{r}\begin{bmatrix} R_{0x}+x \\ R_{0y}+y \\ R_{0z}+z \end{bmatrix} + \frac{g_\omega}{\omega}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2} + \dfrac{\mu}{r^4}(5\sin^2\varphi_s - 1) \\ g_\omega = -\dfrac{2\mu}{r^4}\sin\varphi_s \end{cases}$$

4. 柯氏惯性力 F_g

众所周知，地地弹道导弹的发射点和目标点均位于地球上，而地球又不停地绕其自转轴由西向东转动，所以当相对于发射坐标系建立导弹质心运动方程和研究其运动规律时，就必须涉及到因地球自转而产生的柯氏惯性力和牵连惯性力。

由《理论力学》可知，在发射坐标系中，导弹的柯氏加速度 $\dot{\boldsymbol{W}}_c$ 和柯氏惯性力分别表为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{W}}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V} = 2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^0 & \boldsymbol{y}^0 & \boldsymbol{z}^0 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{F}_c = -m\dot{\boldsymbol{W}}_c \end{cases} \qquad (6-2.6)$$

式中

m 为导弹瞬时质量；

$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$、z^0 为发射坐标系各轴的单位矢量；

$V_j(j = x, y, z)$ 为导弹质心相对地球的运动速度矢 $\boldsymbol{V}$ 在发射坐标系各轴上的分量；

$\omega_j(j = x, y, z)$ 为地球自转角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 在发射坐标系各轴上的分量，即

$$\begin{cases} \omega_x = \omega\cos B_T\cos A_T \\ \omega_y = \omega\sin B_T \\ \omega_z = -\omega\cos B_T\sin A_T \end{cases}$$

B_T、A_T 分别为发射点天文纬度和天文瞄准方位角。

在弹道计算中，为方便起见，用 $\dot{\boldsymbol{V}}_c$ 代替 $-\dot{\boldsymbol{W}}_c$，即

$$\dot{\boldsymbol{V}}_c = -\dot{\boldsymbol{W}}_c$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

根据(6－2.6)式,且令

$$\begin{cases} b_{12} = -b_{21} = 2\omega_z \\ b_{31} = -b_{13} = 2\omega_y \\ b_{23} = -b_{32} = 2\omega_x \end{cases} \tag{6-2.7}$$

则 $\dot{\boldsymbol{V}}_c$ 在发射坐标系各轴上的分量为

$$\begin{cases} \dot{V}_{cx} = b_{12}V_y + b_{13}V_z \\ \dot{V}_{cy} = b_{21}V_x + b_{23}V_z \\ \dot{V}_{cz} = b_{31}V_x + b_{32}V_y \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{cx} \\ \dot{V}_{cy} \\ \dot{V}_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{6-2.8}$$

于是,柯氏惯性力 $\boldsymbol{F}_c$ 在发射坐标系各轴上的投影为

$$F_{cj} = m\dot{V}_{cj} \qquad (j = x, y, z) \tag{6-2.9}$$

5. 牵连惯性力

导弹相对旋转着的地球运动时,除产生柯氏惯性力外,同时还产生牵连惯性力。由理论力学可知,导弹某瞬时的牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_e$ 和牵连加速度 $\dot{\boldsymbol{W}}_e$ 为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{W}}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{F}_e = -m\boldsymbol{W}_e \end{cases}$$

$\boldsymbol{r}$ 为导弹质心的地心矢径。

当用 $\dot{\boldsymbol{V}}_e$ 代替 $-\dot{\boldsymbol{W}}_e$ 时,则有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{V}}_e = \omega^2 \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{F}_e = m\dot{\boldsymbol{V}}_e \end{cases}$$

为便于实际应用,引入关系式

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{x}^0 + \omega_y \boldsymbol{y}^0 + \omega_z \boldsymbol{z}^0 \\ \boldsymbol{r} = (R_{0x} + x)\boldsymbol{x}^0 + (R_{0y} + y)\boldsymbol{y}^0 + (R_{0z} + z)\boldsymbol{z}^0 \end{cases}$$

且令

$$\begin{cases} a_{11} = \omega^2 - \omega_x^2 \\ a_{12} = a_{21} = -\omega_x\omega_y \\ a_{13} = a_{31} = -\omega_x\omega_z \\ a_{22} = \omega^2 - \omega_y^2 \\ a_{23} = a_{32} = -\omega_y\omega_z \\ a_{33} = \omega^2 - \omega_z^2 \end{cases} \tag{6-2.10}$$

则得

$$\begin{cases} \dot{V}_{ex} = a_{11}(R_{0x} + x) + a_{12}(R_{0y} + y) + a_{13}(R_{0z} + z) \\ \dot{V}_{ey} = a_{21}(R_{0x} + x) + a_{22}(R_{0y} + y) + a_{23}(R_{0z} + z) \\ \dot{V}_{ez} = a_{31}(R_{0x} + x) + a_{32}(R_{0y} + y) + a_{33}(R_{0z} + z) \end{cases}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

或

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{ex} \\ \dot{V}_{ey} \\ \dot{V}_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{0x} + x \\ R_{0y} + y \\ R_{0z} + z \end{bmatrix} \tag{6-2.11}$$

这样，牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_c$ 在发射坐标系各轴上的投影可表成

$$F_{cj} = m\dot{V}_{cj} \qquad (j = x, y, z) \tag{6-2.12}$$

计算表明，柯氏惯性力比牵连惯性力大得多，因此柯氏惯性力对导弹运动的影响是主要的，且射程越远，其影响也越大。例如，对远程导弹而言，如果说牵连惯性力产生的射程偏差为几十或近百公里的话，那么柯氏惯性力竟能引起几百乃至上千公里的射程偏差，所以，因地球自转产生的惯性力，尤其是柯氏惯性力对导弹飞行的影响作用是万万不可忽视的。

将式(6-2.3) ~ (6-2.5)及(6-2.9)、(6-2.12)分别代入式(6-2.2)的各方程中，则得弹道导弹质心运动的动力学方程

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\cos\varphi\cos\psi + R'\delta_\varphi(-\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ \qquad - R'\delta_\psi(\sin\varphi\sin\gamma + \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma) - C_x qS_m\cos\theta\cos\sigma \\ \qquad + C_y^\alpha\alpha qS_m(-\sin\theta\cos\gamma_c + \cos\theta\sin\sigma\sin\gamma_c) \\ \qquad - C_y^\beta\beta qS_m(\sin\theta\sin\gamma_c + \cos\theta\sin\sigma\cos\gamma_c)] + g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\sin\varphi\cos\psi + R'\delta_\varphi(\cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ \qquad - R'\delta_\psi(-\cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma) - C_x qS_m\sin\theta\cos\sigma \\ \qquad + C_y^\alpha\alpha qS_m(\cos\theta\cos\gamma_c + \sin\theta\sin\sigma\sin\gamma_c) \\ \qquad - C_y^\beta\beta qS_m(-\cos\theta\sin\gamma_c + \sin\theta\sin\sigma\cos\gamma_c)] + g_y + \dot{V}_{ey} + \dot{V}_{cy} \\ \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{1}{m}[-P_e\sin\psi + R'\delta_\varphi\cos\psi\sin\gamma - R'\delta_\psi\cos\psi\cos\gamma \\ \qquad + C_x qS_m\sin\sigma + C_y^\alpha\alpha qS_m\cos\sigma\sin\gamma_c \\ \qquad - C_y^\beta\beta qS_m\cos\sigma\cos\gamma_c] + g_z + \dot{V}_{ez} + \dot{V}_{cz} \end{cases} \tag{6-2.13}$$

由于导弹在主动段飞行过程中，角 γ、ψ、σ 及 γ_c 都是小量，可近似认为 $\sin\gamma \approx \gamma$、$\sin\psi \approx \psi$、$\sin\sigma \approx \sigma$、$\sin\gamma_c \approx \gamma_c$、$\cos\psi \approx \cos\gamma \approx \cos\sigma \approx \cos\gamma_c \approx 1$，而且 δ_φ、δ_ψ、α 及 β 也不甚大，因此这些角度及其函数值的二阶以上微量均可略去。所以，导弹质心相对于发射坐标系的运动微分方程可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\cos\varphi - R'\delta_\varphi\sin\varphi - C_x qS_m\cos\theta - C_y^\alpha\alpha qS_m\sin\theta] + g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\sin\varphi + R'\delta_\varphi\cos\varphi - C_x qS_m\sin\theta + C_y^\alpha\alpha qS_m\cos\theta] + g_y + \dot{V}_{ey} + \dot{V}_{cy} \\ \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{1}{m}[-P_e\psi - R'\delta_\psi + C_x qS_m\sigma - C_y^\beta\beta qS_m] + g_z + \dot{V}_{ez} + \dot{V}_{cz} \end{cases} \tag{6-2.14}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

6.2.2 绕质心运动方程

根据(6 – 1.32)式,导弹绕质心运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_{rel} + \boldsymbol{M}_k$$

上式等号左端即为瞬时 t 固化刚体相对于质心平动坐标系的动量矩对时间的导数,即

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_1$ 为导弹相对于平动坐标系的转动角速度。

由于弹体坐标系之坐标轴与弹体惯性主轴重合,故对于中心惯性主轴坐标系来说,$\dot{\boldsymbol{I}}$ 可简化为

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}$$

其中,I_{x_1}、I_{y_1} 及 I_{z_1} 分别为弹体绕弹体坐标系各轴转动惯量。

绕质心运动方程式等号右端为作用于导弹的力矩。由于弹道导弹绕质心转动的角速度很小,因此柯氏力矩 $\boldsymbol{M}_k$ 一般可以略去;喷射反作用力矩和变分力对质心的力矩为控制力形成的控制力矩 $\boldsymbol{M}_c$;而外力矩 $\boldsymbol{M}$ 只有空气动力矩 $\boldsymbol{M}_z$ 和阻尼力矩 $\boldsymbol{M}_d$。

这样,弹道导弹绕质心运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_z + \boldsymbol{M}_d \tag{6 – 2.15}$$

由于

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^0 & \boldsymbol{y}_1^0 & \boldsymbol{z}_1^0 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ I_{x_1}\omega_{x_1} & I_{y_1}\omega_{y_1} & I_{z_1}\omega_{z_1} \end{bmatrix}$$

$$= (I_{z_1} - I_{y_1})\omega_{z_1}\omega_{y_1}\boldsymbol{x}_1^0 + (I_{x_1} - I_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1}\boldsymbol{y}_1^0 + (I_{y_1} - I_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1}\boldsymbol{z}_1^0$$

式中 ω_{z_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1} 为 $\boldsymbol{\omega}_1$ 在弹体坐标系各轴上之分量,所以绕质心运动方程在弹体坐标系内的投影式为

$$\begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\omega_{x_1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_{y_1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_{z_1}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{z_1} - I_{y_1})\omega_{z_1}\omega_{y_1} \\ (I_{x_1} - I_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1} \\ (I_{y_1} - I_{x_1})\omega_{y_1}\omega_{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum M_{x_1} \\ \sum M_{y_1} \\ \sum M_{z_1} \end{bmatrix} \tag{6 – 2.16}$$

其中 $\sum M_{x_1}$、$\sum M_{y_1}$ 及 $\sum M_{z_1}$ 为外力矩和控制力矩矢在弹体坐标系各轴上投影的代数和。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

实际飞行中，导弹转动角速度分量 ω_{x_1}、ω_{y_1} 及 ω_{z_1} 均很小，上式左端的第二项完全可以略去，这样(6－2.16)式可简化为

$$\begin{cases} I_{x_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{x_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{x_1} \\ I_{y_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{y_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{y_1} \\ I_{z_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{z_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{z_1} \end{cases} \tag{6-2.17}$$

通常将导弹质心运动微分方程(6－2.13)或(6－2.14)和绕质心运动微分方程(6－2.16)或(6－2.17)统称为动力学微分方程组。由于该方程组所包含的变量个数多于方程的数目，故尚需补充一些方程式方能求解。

6.2.3 运动学方程

运动学方程包含描述导弹质心运动与姿态运动的两组方程，前者可由动力学质心运动方程积分求得，即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_z \\ V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{6-2.18}$$

而后者则可直接应用导弹转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 在弹体坐标系之投影式(2－2.8)

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\gamma} - \dot{\varphi}\sin\psi \\ \omega_{y_1} = \dot{\psi}\cos\gamma + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma \\ \omega_{z_1} = \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma - \dot{\psi}\sin\gamma \end{cases}$$

导出，即

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{1}{\cos\psi}(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma) \\ \dot{\psi} = \omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma \\ \dot{\gamma} = \omega_{x1} + tg\psi(\omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma) \end{cases}$$

在有控制情况下，ψ 及 γ 皆为小量，近似认为 $\sin\psi \approx \psi$、$\sin\gamma \approx \gamma$、$\cos\psi \approx \cos\gamma \approx 1$，因此，运动学方程组可归纳为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y \\ \dfrac{dz}{dt} = V_z \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \omega_{x_1} + \omega_{z_1}\psi \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \omega_{y_1} - \omega_{z_1}\gamma \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_{z_1} + \omega_{y_1}\gamma \\ V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{6-2.19}$$

6.2.4 姿态控制方程

弹道导弹在主动段飞行过程中，控制系统始终在进行工作。由于导弹运动分为质心运动和绕质心运动，因此导弹控制系统也相应地分为控制质心运动的制导系统和控制绕质心运动的姿态稳定系统。

控制导弹质心运动的目的是使导弹落点以要求的精度命中目标。这种控制常以控制发动机关机时间并结合对主动段质心运动进行导引来完成，故对质心运动的控制习惯上称为制导。

绕质心运动的控制主要是控制飞行中的导弹姿态，以使导弹在主动段能稳定地沿着预定弹道飞行，并根据制导系统发出的导引信号控制导弹质心运动。对绕质心运动的控制称为姿态控制，与之相应的控制系统即称为姿态稳定系统。

绕质心运动包括俯仰、偏航和滚动三个姿态运动。弹道导弹往往要求实时地消除偏航和滚动，确保俯仰角按给定的飞行程序规律变化。因此姿态控制的作用在于：一方面为控制作用，即按程序控制的指令，准确地改变导弹的飞行姿态；另一方面为稳定作用，即克服各种干扰，使导弹姿态角的偏差在允许值范围内。

对弹道导弹而言，由于俯仰、偏航和滚动运动间的相互交链影响较小，因此姿态稳定系统对应地分为三个独立通道，即俯仰、偏航和滚动通道。各通道的组成基本相同，主要包括敏感装置、变换放大装置和执行机构。敏感装置用于感受导弹实际姿态角偏离其预定姿态的误差信号；变换放大装置的作用是对敏感装置测得的姿态角误差信号进行加工和放大，形成合适的控制信号送给执行机构，而执行机构则是产生与控制信号成比例的控制力和控制力矩，以便控制导弹绕质心运动。图 6－3 示出了包括控制对象(导弹)在内的姿态稳定系统俯仰通道闭合回路方块图。δ_φ 为俯仰通道中执行机构的当量偏角(当量舵偏角或发动机当量摆动角)。

由于弹道导弹是气动轴对称的，因此偏航通道和滚动通道的结构与俯仰通道基本相同，只是它们的输入和输出的误差信号和当量偏角不同而已。

误差信号与执行机构的当量偏角间的数学关系式，称为姿态控制方程，它的形式与飞

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

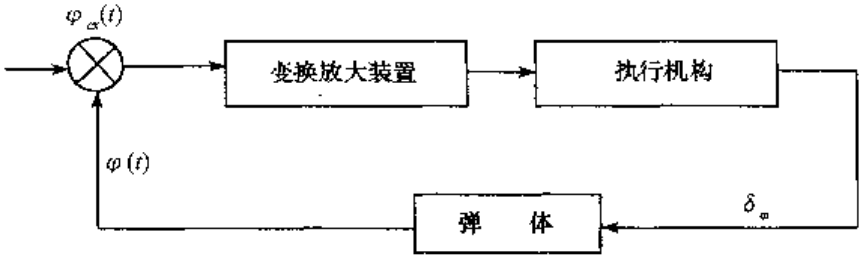


图 6－3

行程序和控制系统的具体结构紧密相关，这里我们仅给出俯仰、偏航和滚动运动三个姿态控制方程的一般形式

$$\begin{cases} F_1(\delta_\gamma, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \cdots) = 0 \\ F_2(\delta_\psi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \cdots) = 0 \\ F_3(\delta_\varphi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \cdots) = 0 \end{cases} \tag{6-2.20}$$

函数 F_1、F_2、F_3 表示控制力产生的当量偏角 δ_γ、δ_ψ、δ_φ 与各量 x、y、z、$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$、γ、ψ、φ、…… 间的关系。对于具体型号的导弹，其姿态控制方程均有具体的表达形式。

6.2.5　联系方程

描述导弹运动姿态和速度方向的 8 个欧拉角 φ、ψ、γ、θ、σ、γ_c、α、β 中，实际上仅有 5 个角是独立的，因此它们间的关系式可以通过一坐标系各轴上之分量按不同途径向另一坐标系转换的比较中获得。例如，应用发射坐标系与弹体坐标系和速度坐标系与弹体坐标系间的方向余弦变换矩阵式(2－2.4) 及(2－4.4) 式

$$[x] = \boldsymbol{A}_g^b[x_1]$$

$$[x_1] = \boldsymbol{C}_b^c[x_c]$$

即可得出发射坐标系与速度坐标系间的方向余弦关系矩阵式

$$[x] = \boldsymbol{A}_g^b\boldsymbol{C}_b^c[x_c] \tag{6-2.21}$$

将此式与(2－4.1) 式给出的发射坐标系和速度坐标系间的方向余弦关系式

$$[x] = \boldsymbol{C}_g^c[x_c]$$

进行比较，可得

$$\boldsymbol{C}_g^c = \boldsymbol{A}_g^b \cdot \boldsymbol{C}_b^c$$

即

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma & \cos\theta\sin\sigma\sin\gamma_c - \sin\theta\cos\gamma_c & \cos\theta\sin\sigma\cos\gamma_c + \sin\theta\sin\gamma_c \\ \sin\theta\cos\sigma & \sin\theta\sin\sigma\sin\gamma_c + \cos\theta\cos\gamma_c & \sin\theta\sin\sigma\cos\gamma_c - \cos\theta\sin\gamma_c \\ -\sin\sigma & \cos\sigma\sin\gamma_c & \cos\sigma\cos\gamma_c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma \\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma \\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} \tag{6-2.22}$$

在主动段有控制的情况下，欧拉角 ψ,σ,γ 及 $\beta、\gamma_c$ 均较小，可认为 $\sin\psi\approx\psi、\sin\sigma\approx\sigma、\sin\beta\approx\beta、\sin\gamma_c\approx\gamma_c、\sin\gamma\approx\gamma$ 及 $\cos\psi\approx\cos\sigma\approx\cos\gamma\approx\cos\gamma_c\approx\cos\beta\approx1$。顾及上述情况并略去二阶以上微量时，则欧拉角的简化关系式为

$$\begin{cases}\gamma_c=\gamma\cos\alpha-\psi\sin\alpha\\ \theta=\varphi-\alpha\\ \sigma=\psi\cos\alpha+\gamma\sin\alpha-\beta\end{cases} \tag{6-2.23}$$

如果考虑到导弹实际飞行中的冲角 α 也不甚大的情况，那么欧拉角联系方程还可以进一步简化为

$$\begin{cases}\varphi=\theta+\alpha\\ \psi=\sigma+\beta\\ \gamma=\gamma_c\end{cases} \tag{6-2.24}$$

这一结论也不难从这些角的几何定义中得到验证(图 6-4)。

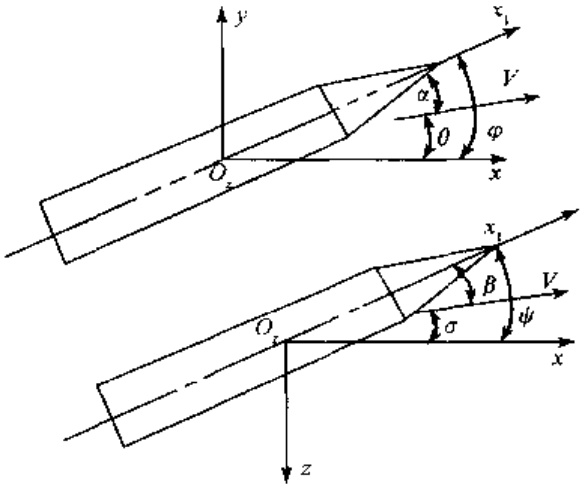


图 6-4

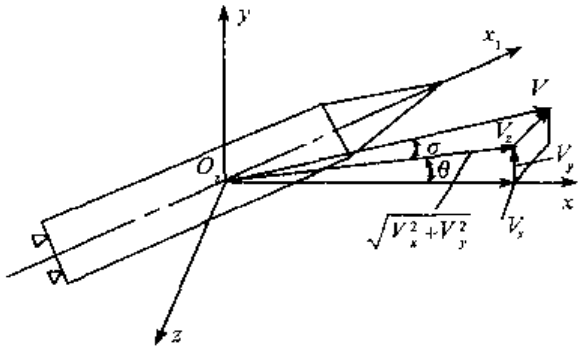


图 6-5

此外，弹道倾角 θ 和弹道偏角 σ 与速度 V 也有一定联系，由图 6-5 很容易写出其关系式为

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} & V_x\geqslant0\\ \sin\sigma=-\dfrac{V_z}{V}\end{cases}$$

即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \theta = \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} & V_x \geqslant 0 \\ \sigma = -\sin^{-1}\dfrac{V_z}{V} \end{cases} \tag{6-2.25}$$

6.2.6 其他附加方程

在弹道计算中所用到的大气参数和空气动力系数等均与导弹质心离地面的高度有关，为此还需列出计算弹道高度 $h(t)$ 的辅助方程。

当地球为正常地球椭球体时，导弹相对椭球体表面的高度为

$$h = r - R = \sqrt{(x + R_{0x})^2 + (y + R_{0y})^2 + (z + R_{0z})^2} - R \tag{6-2.26}$$

其中，R 为导弹质心在正常椭球体表面上的对应点至地心的距离，由下式表为

$$R = a(1 - \tilde{\alpha})\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi_s + (1 - \tilde{\alpha})^2\cos^2\varphi_s}}$$

当地球为圆球体时，高度 h 为

$$h = \sqrt{x^2 + (\bar{R} + y)^2 + z^2} - \bar{R} \tag{6-2.27}$$

其中，$\bar{R}$ 为地球平均半径。

导弹飞行质量是时间的函数，当推进剂质量秒流量 $\dot{m}$ 为常数时，则计算导弹任一飞行瞬时的质量方程为

$$m = m_0 - \dot{m}t \tag{6-2.28}$$

此外，求解主动段关机点参数时，还需要给出其关机方程，以使运动微分方程积分到满足关机条件为止。

将上述各方程综合在一起，即得弹道导弹主动段一般形式的运动微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{1}{m}\left[P_e\cos\varphi - R'\delta_\varphi\sin\varphi - C_x qS_m\cos\theta - C_y^\alpha \alpha qS_m\sin\theta\right] + g_x + \dot{V}_{\alpha x} + \dot{V}_{\alpha x} \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{1}{m}\left[P_e\sin\varphi + R'\delta_\varphi\cos\varphi - C_x qS_m\sin\theta + C_y^\alpha \alpha qS_m\cos\theta\right] + g_y + \dot{V}_{\alpha y} + \dot{V}_{\sigma y} \\ \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{1}{m}\left[-P_e\psi - R'\delta_\psi + C_x qS_m\sigma - C_y^\beta \beta qS_m\right] + g_z + \dot{V}_{\alpha z} + \dot{V}_{\alpha z} \end{cases}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
I_{x_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{x_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{x_1} \\
I_{y_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{y_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{y_1} \\
I_{z_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega_{z_1}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{z_1} \\
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_z \\
\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \omega_{x_1} + \omega_{z_1}\psi \\
\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_{y_1} - \omega_{z_1}\gamma \\
\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_{z_1} + \omega_{y_1}\gamma \\
V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \\
F_1(\delta_\gamma, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \cdots) = 0 \\
F_2(\delta_\psi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \cdots) = 0 \\
F_3(\delta_\varphi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \cdots) = 0 \\
\alpha = \varphi - \theta \\
\beta = \psi - \sigma \\
\gamma = \gamma_c \\
\theta = \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \\
\sigma = -\sin^{-1}\dfrac{V_z}{V} \\
h = \sqrt{x^2 + (\tilde{R} + y)^2 + z^2} - \tilde{R} \\
m = m_0 - \dot{m}t
\end{cases}
\tag{6-2.29}
$$

上述 23 个方程，共有 23 个未知量：V_x、V_y、V_z、V、x、y、z、φ、ψ、γ、θ、σ、γ_c、α、β、ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}、δ_φ、δ_ψ、δ_γ、h、m。该方程组为非线性变系数常微分方程组，在给出的初始条件、终端条件和具体的关机方程下，应用数值积分方法解算上述方程组即可求出满足初始条件和关机条件的主动段终点运动参数。

顾及导弹在主动段有控制系统的作用，致使其偏离射面的运动较小，偏离射面的角度和角速度也很小，这样有些量就可当作二阶微量而略去。另外，导弹飞行高度可近似用

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$h = \sqrt{x^2 + (\tilde{R} + y)^2} - \tilde{R}$$

计算，而控制方程 F_3 也可近似为只含纵向运动参数。这样，就可将方程组(6 - 2.29)分成描述导弹在射面内运动的纵向运动微分方程组和偏离射面运动的侧向运动微分方程组两部分。

纵向运动方程组：

$$\begin{cases}
\dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\cos\varphi - R'\delta_\varphi\sin\varphi - C_x qS_m\cos\theta - C_y^\alpha\alpha qS_m\sin\theta] + g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\
\dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{1}{m}[P_e\sin\varphi + R'\delta_\varphi\cos\varphi - C_x qS_m\sin\theta + C_y^\alpha\alpha qS_m\cos\theta] + g_y + \dot{V}_{ey} + \dot{V}_{cy} \\
I_{z_1}\dfrac{d\omega_{z_1}}{dt} = \sum M_{z_1} \\
\dfrac{dx}{dt} = V_x \\
\dfrac{dy}{dt} = V_y \\
\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_{z_1} \\
V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\
\theta = \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \\
\alpha = \varphi - \theta \\
F_3(\delta_\varphi, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}\cdots) = 0 \\
h = \sqrt{x^2 + (y + \tilde{R})^2} - \tilde{R} \\
m = m_0 - \dot{m}t
\end{cases} \tag{6 - 2.30}$$

只要给定初始条件及具体的关机方程，就可解出这 12 个方程中的 12 个纵向运动参数：V_x、V_y、x、y、φ、θ、α、ω_{z_1}、h、m、δ_φ、V。

纵向运动决定着导弹运动的主要特性。研究导弹的纵向运动，这在分析导弹的基本特性以及在导弹的初步设计、研制和使用中，都具有重要的实际意义。

侧向运动方程组：

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
\dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{1}{m}[-P_e\psi - R'\delta_\psi + C_xqS_m\sigma - C_y^\alpha\beta qS_m] + g_x + \dot{V}_{ax} + \dot{V}_{ax} \\
I_{z_1}\dfrac{d\omega_{z_1}}{dt} = \sum M_{z_1} \\
I_{y_1}\dfrac{d\omega_{y_1}}{dt} = \sum M_{y_1} \\
\dfrac{dz}{dt} = V_z \\
\dfrac{d\gamma}{dt} = \omega_{z_1} \\
\dfrac{d\psi}{dt} = \omega_{y_1} \\
\beta = \psi - \sigma \\
\sigma = -\sin^{-1}\dfrac{V_z}{V} \\
\gamma = \gamma_c \\
F_1(\delta_\gamma, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \cdots) = 0 \\
F_2(\delta_\psi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \cdots) = 0
\end{cases}
\tag{6-2.31}
$$

从(6-2.30)中解出导弹纵向运动参数后,对于给定的起始条件和具体的侧向控制方程,同样可解出(6-2.31)中的11个侧向运动参数:V_z、z、ψ、γ、γ_c、σ、β、δ_ψ、δ_γ、ω_{z_1}、ω_{y_1}。

运动方程的分组,可使计算大为简化,并仍能给出相当准确的结果,以便于解决导弹研制和设计中的问题,也便于导弹姿态控制和动力学问题的求解。

§6.3 发射坐标系内的导弹主动段运动方程

由于不同型号导弹的制导方案、控制系统结构形式以及所给定的弹道初始条件的差异,因此描述其主动段运动规律的弹道方程也就不完全相同。在这一节里,我们讨论由两级液体火箭发动机推动,采用平台计算机惯性制导方案,并以摆动发动机作为姿态控制执行机构的导弹的主动段弹道方程。由于这类导弹自身的特点和所给出的初始条件不同以及考虑对其运动影响因素的增加,因而使其主动段弹道方程式不但与一般弹道方程式(6-2.29)有较大差别,而且方程个数增加许多,多达几十个乃至近百个。下面讨论的主动段运动微分方程组,便是顾及上述情况并以发射坐标系为参考的弹道导弹主动段弹道方程组。

6.3.1 质心运动方程

根据在发射坐标系内建立导弹质心运动方程的原理及作用在其上的力,则得导弹质心运动方程

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{V}_x\\ \dot{V}_y\\ \dot{V}_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_g^b\begin{bmatrix}\dot{W}_{x_1}\\ \dot{W}_{y_1}\\ \dot{W}_{z_1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_x+\dot{V}_{ax}+\dot{V}_{cx}\\ g_y+\dot{V}_{ay}+\dot{V}_{cy}\\ g_z+\dot{V}_{az}+\dot{V}_{cz}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{bmatrix}\end{cases}\tag{6-3.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_g^b$ 为发射坐标系与弹体坐标系间的方向余弦矩阵式，即

$$\boldsymbol{A}_g^b=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma-\sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma\\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma\\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma\end{bmatrix}\tag{6-3.2}$$

轴向、法向和横向视加速度表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{W}_{x_1}\\ \dot{W}_{y_1}\\ \dot{W}_{z_1}\end{bmatrix}=\frac{1}{m}\left[\boldsymbol{C}_b^c\begin{bmatrix}-X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{x_1}\\ P_{y_1}\\ P_{z_1}\end{bmatrix}\right]\tag{6-3.3}$$

其中，弹体坐标系与速度坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$\boldsymbol{C}_b^c=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta\\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\tag{6-3.4}$$

空气动力表达式

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_xqS_m\\ C_y^\alpha\alpha qS_m\\ -C_y^\beta\beta qS_m\end{bmatrix}\tag{6-3.5}$$

有效推力和控制力表达式

$$\begin{bmatrix}P_{x_1}\\ P_{y_1}\\ P_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{cases}P\cos\mu\cos\delta_\varphi\cos\delta_\psi\\ R'\sin\delta_\varphi\cos\delta_\psi\\ -R'\sin\delta_\psi\cos\delta_\varphi\end{cases} & \text{一级}\\ \begin{cases}P_z+R'\cos\mu(\cos\delta_\varphi+\cos\delta_\psi)\\ R'\sin\delta_\varphi\\ -R'\sin\delta_\psi\end{cases} & \text{二级}\end{cases}\tag{6-3.6}$$

其中

$$R'=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}P & \text{一级}\\ \dfrac{1}{2}P_u & \text{二级}\end{cases}\tag{6-3.7}$$

引力加速度表达式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_r \dfrac{x + R_{0x}}{r} + g_\omega \dfrac{\omega_x}{\omega} + \delta g_x \cdot 10^{-5} \\ g_r \dfrac{y + R_{0y}}{r} + g_\omega \dfrac{\omega_y}{\omega} + \delta g_y \cdot 10^{-5} \\ g_r \dfrac{z + R_{0z}}{r} + g_\omega \dfrac{\omega_z}{\omega} + \delta g_z \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{6-3.8}$$

其中

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2} + \dfrac{\mu}{r^4}(5\sin^2\varphi_s - 1) \\ g_\omega = -\dfrac{2\mu}{r^4}\sin\varphi_s \end{cases} \tag{6-3.9}$$

扰动引力加速度 δg_x、δg_y、δg_z(单位为毫伽)计算方法参见 § 4.3。如果不考虑空间重力异常对导弹运动的影响,则扰动引力分量 δg_x、δg_y、δg_z 均计为零。

牵连加速度和柯氏加速度表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{ex} \\ \dot{V}_{ey} \\ \dot{V}_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + R_{0x} \\ y + R_{0y} \\ z + R_{0z} \end{bmatrix} \tag{6-3.10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{cx} \\ \dot{V}_{cy} \\ \dot{V}_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{6-3.11}$$

其中

$$\begin{cases} a_{11} = \omega^2 - \omega_x^2 \\ a_{12} = a_{21} = -\omega_x\omega_y \\ a_{13} = a_{31} = -\omega_x\omega_z \\ a_{22} = \omega^2 - \omega_y^2 \\ a_{23} = a_{32} = -\omega_y\omega_z \\ a_{33} = \omega^2 - \omega_z^2 \\ b_{12} = -b_{21} = 2\omega_z \\ b_{31} = -b_{13} = 2\omega_y \\ b_{23} = -b_{32} = 2\omega_x \end{cases} \tag{6-3.12}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega\cos B_T\cos A_T \\ \omega_y = \omega\sin B_T \\ \omega_z = -\omega\cos B_T\sin A_T \end{cases} \tag{6-3.13}$$

发射点地心纬度、地心距离及其在发射坐标系内的坐标

$$\begin{cases} \varphi_{s0} = \sin^{-1}\dfrac{z_0}{R_0} \\ R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \\ \quad = \sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2} \end{cases} \tag{6-3.14}$$

和

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} R_{ox} \\ R_{oy} \\ R_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{6-3.15}$$

其中 x_0、y_0、z_0 为发射点地心矢径在地心大地直角坐标系中之坐标。

空间任一点的地心大地直角坐标、地心距离、地心经度和地心纬度表达式：

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{6-3.16}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2} \\ \lambda_s = \dfrac{y_s}{|y_s|}\left(\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}\right) \\ \varphi_s = \sin^{-1}\dfrac{z_s}{r} \end{cases} \tag{6-3.17}$$

其中

$$\begin{cases} d_{11} = -\sin\lambda_T\sin A_T - \cos\lambda_T\cos A_T\sin B_T \\ d_{12} = \cos\lambda_T\cos B_T \\ d_{13} = -\sin\lambda_T\cos A_T + \cos\lambda_T\sin A_T\sin B_T \\ d_{21} = \cos\lambda_T\sin A_T - \sin\lambda_T\cos A_T\sin B_T \\ d_{22} = \sin\lambda_T\cos B_T \\ d_{23} = \cos\lambda_T\cos A_T + \sin\lambda_T\sin A_T\sin B_T \\ d_{31} = \cos A_T\cos B_T \\ d_{32} = \sin B_T \\ d_{33} = -\sin A_T\cos B_T \end{cases} \tag{6-3.18}$$

λ_T，B_T 及 A_T 分别为发射点天文经度、天文纬度和天文瞄准方位角。

地球为正常椭球体时其表面上任意点的地心距离表达式：

$$R = a(1-\tilde{\alpha})\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi_s + (1-\tilde{\alpha})^2\cos^2\varphi_s}} \tag{6-3.19}$$

$\tilde{\alpha}$ 为椭球地球体扁率。

6.3.2 姿态控制方程

众所周知，导弹在理想条件下飞行时，其俯仰角 φ 基本上随飞行程序角 $\varphi_{cx}(t)$ 而变化，而且其纵对称面与射面基本相重合。如果导弹因外界干扰作用面偏离预定弹道出现姿态角偏差 $\Delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_{cx}(t)$ 或 $\tilde{\psi}$，$\tilde{\gamma}$ 时，则控制系统将根据这些姿态角误差信号及时地使发动机摆动 δ_φ 或 δ_ψ，δ_γ，产生控制力和控制力矩，以纠正外界干扰引起的姿态角误差，确保导弹沿着预定弹道飞行。这就是此类导弹姿态控制的基本原理。

为实现这一基本原理，如果导弹在第一级采用姿态角和姿态角变化率控制方案，而在第二级则采用纯姿态角加横法向导引控制方案，那么这类导弹因滚动运动很小而被略去时的姿态控制方程可表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\delta_\varphi = a_0^\varphi \Delta\varphi + m' \\ \delta_\psi = a_0^\psi \bar{\psi} + n'\end{cases} \tag{6-3.20}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_{cx}(t) \\ \tilde{\varphi} = \sin^{-1}(a'_{11}\sin\varphi - a'_{12}\cos\varphi) \\ \bar{\psi} = \sin^{-1}(a'_{33}\sin\psi - a'_{31}\cos\varphi\cos\psi - a'_{32}\sin\varphi\cos\psi) \\ m' = \begin{cases} g_z^\varphi \dot{W}_{z_1} & (\text{一级}) \\ K_{u0}^\varphi u_\varphi & (\text{二级}) \end{cases} \\ n' = \begin{cases} -g_z^\psi \dot{W}_{z_1} & (\text{一级}) \\ K_{u0}^\psi u_\psi & (\text{二级}) \end{cases}\end{cases} \tag{6-3.21}$$

u_φ、u_ψ 分别为法向、横向导引信号；

$\dot{W}_{y1}$，$\dot{W}_{z1}$ 为法向视加速度和横向视加速度；

K_{u0}^φ，K_{u0}^ψ 为导引信号放大系数；

g_z^φ，g_z^ψ 为视加速度放大系数。

6.3.3 联系方程

$$\begin{cases}\varphi = \theta + \alpha \\ \psi = \beta + \sigma \\ \theta = \begin{cases} \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} & V_x \geqslant 0 \\ -\left(\pi + \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}\right) & V_x < 0 \end{cases} \\ \sigma = -\sin^{-1}\dfrac{V_z}{V}\end{cases} \tag{6-3.22}$$

6.3.4 瞬时平衡方程

导弹垂直起飞几秒钟后，弹轴将根据飞行程序的要求，逐渐地向目标方向倾斜转弯，但因这种转动进行得很慢，以致可假设为导弹在各瞬时之转动角速度 ω_1 和角加速度 $\dot{\omega}_1$ 均等于零。也就是说，导弹每时每刻均处于转动的“瞬时平衡”状态，因而作用于导弹上的外力矩矢量和为零。根据这一假设，则(6-2.17)式即为

$$\begin{cases} I_{x_1}\dfrac{d\omega_{x_1}}{dt} = \sum M_{x_1} = 0 \\ I_{y_1}\dfrac{d\omega_{y_1}}{dt} = 0 \\ I_{z_1}\dfrac{d\omega_{z_1}}{dt} = 0 \end{cases}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

由 § 6.2 可知，作用于导弹上的力矩有空气动力矩、控制力矩和阻尼力矩。由于导弹飞行中的转动角速度小，由此产生的气动阻尼力矩也不大、可以略去。若将(3 - 2.17)式或(3 - 2.27)式和(5 - 3.3)式代入上式，且略去滚动运动方程，则得“瞬时平衡”方程，

$$\begin{cases} -R'(x_{ry}-x_z)\delta_\varphi - C_n^\alpha qS_m(x_y-x_z)\alpha = 0 \\ -R'(x_{ry}-x_z)\delta_\psi - C_n^\alpha qS_m(x_y-x_z)\beta = 0 \end{cases}$$

上述方程的物理意义是，作用于导弹上的控制力矩与空气动力矩在其主动段的每一瞬时均处于平衡状态。也就是说，导弹在控制力矩和空气动力矩共同作用下的转动运动是瞬时完成的，而不考虑其转动的过程。这将使导弹绕质心的复杂转动问题，转化为较简单的静平衡问题来研究。

将其姿态控制方程式(6 - 3.20)和几何联系方程(6 - 3.22)代入上述“瞬时平衡”方程，经过整理，即得导弹瞬时平衡时的冲角 α 及侧滑角 β

$$\begin{cases} \alpha = A^\varphi\left[\varphi_{cx}(t) - \omega_x t_s - \theta - \dfrac{m'}{a_0^\varphi}\right] \\ \beta = A^\psi\left[(\omega_x\sin\varphi - \omega_y\cos\varphi)t_s - \sigma - \dfrac{n'}{a_0^\psi}\right] \\ A^\varphi = A^\psi = \dfrac{a_0^\varphi R'(x_{ry}-x_z)}{a_0^\varphi R'(x_{ry}-x_z) + C_n^\alpha qS_m(x_y-x_z)} \end{cases} \tag{6-3.23}$$

式中 t_s 为从导弹起飞计算起的时间。

6.3.5 发动机推力和推进剂秒流量计算式

$$\begin{cases} P = P_0 + S_a p_0\left(1-\dfrac{p}{p_0}\right) + \dfrac{\partial P}{\partial \dot G}(\delta\dot G_y + \delta\dot G_R) & \text{(一级)} \\ P_z = P_{z0} - S_{az}p_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right) + \left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot G}\right)_z(\delta\dot G_{yz} + \delta\dot G_{Rz}) & \text{(二级主机)} \\ P_u = P_{u0} - S_{au}p_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right) + \left(\dfrac{\partial P}{\partial \dot G}\right)_u(\delta\dot G_{yu} + \delta\dot G_{Ru}) & \text{(二级游机)} \\ \dot G = \dot G_R + \dot G_y \\ \dot G_R = \dot G_{R0} + \delta\dot G_R \\ \dot G_y = \dot G_{y0} + \delta\dot G_R \\ \delta\dot G_R = C_{11}\delta p_{0R} + C_{12}\delta p_{0y} + C_{14}\delta\gamma_R + C_{15}\delta\gamma_y \\ \delta\dot G_y = C_{21}\delta p_{0R} + C_{22}\delta p_{0y} + C_{24}\delta\gamma_R + C_{25}\delta\gamma_y \\ \delta p_{0R} = (p_R - p_{0R}) + C_{41}n_x + C_{42} \\ \delta p_{0y} = (p_y - p_{0y}) + C_{51}n_x + C_{52} \\ p_R = p_{Rz} + 0.1\gamma_{R0}h_R n_x + C_{pR} \\ p_y = p_{yz} + 0.1\gamma_{y0}h_y n_x + C_{py} \\ \delta\gamma_R = \gamma_R - \gamma_{R0} \\ \delta\gamma_y = \gamma_y - \gamma_{y0} \end{cases} \tag{6-3.24}$$

上述推进剂秒流量偏差计算式对一级、二级主发动机和游动发动机均适用。但由于一

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

级是由四台发动机并联组合而成，而且推进剂供给系统相互独立，故计算一级推进剂秒流量偏差 $\delta\dot{G}_y$ 及 $\delta\dot{G}_R$ 时需在等式右端乘以 4。而对于二级游动发动机，虽亦为四台发动机并联组成，但其推进剂均用同一涡轮泵系统供给，故可直接按上述公式计算。

6.3.6 其他弹道参数计算式

1. 导弹质心相对地面的速度

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{6-3.25}$$

2. 导弹质心相对椭球面的高度

$$h = r - R \tag{6-3.26}$$

3. 导弹质心切向、法向和横向加速度

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{1}{V}(V_x\dot{V}_x + V_y\dot{V}_y + V_z\dot{V}_z) \\ V\dot{\theta} = -\dot{V}_x\sin\theta + \dot{V}_y\cos\theta \\ V\dot{\sigma} = -\dot{V}_z - \sigma\dot{V} \end{cases} \tag{6-3.27}$$

4. 当地弹道倾角 Θ 和航程角 f

导弹在任一位置时的速度与当地水平面间的夹角，称为当地弹道倾角，用 Θ 表示。所谓当地水平面是指过导弹质心的地心矢径与地球表面之交点的切平面(图 6-6)。

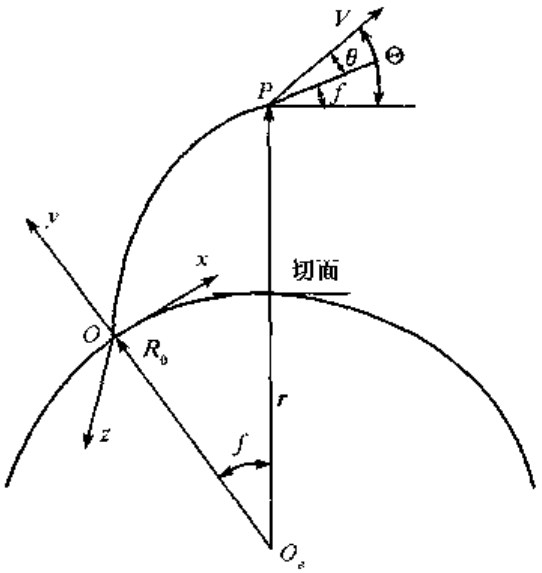


图 6-6

由矢量点积的定义和性质知

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} = rV\sin\Theta$$

而

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = (x + R_{0x})\boldsymbol{x}^0 + (y + R_{0y})\boldsymbol{y}^0 + (R_{0z} + z)\boldsymbol{z}^0 \\ \boldsymbol{V} = V_x\boldsymbol{x}^0 + V_y\boldsymbol{y}^0 + V_z\boldsymbol{z}^0 \end{cases}$$

因此

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\sin\Theta = \frac{V_x(x + R_{0x}) + V_y(y + R_{0y}) + V_z(z + R_{0z})}{rV}$$

或

$$\Theta = \sin^{-1}\frac{V_x(R_{0x} + x) + V_y(R_{0y} + y) + V_z(R_{0z} + z)}{rV} \qquad (6-3.28)$$

导弹任一位置时的地心矢径与发射点地心矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 间的夹角，称为航程角，用 f 表示。根据图 6－6，采用与(6－3.28)式相类似的推导方法，可得

$$f = \cos^{-1}\left[\frac{R_0}{r} + \frac{xR_{0x} + yR_{0y} + zR_{0z}}{rR_0}\right] \qquad (6-3.29)$$

由图 6－6 也不难得关系式

$$\Theta = \theta + f \qquad (6-3.30)$$

对上式求导数

$$\dot{\Theta} = \dot{\theta} + \dot{f}$$

由于

$$V\cos\Theta = r\dot{f}$$

所以

$$\begin{cases}\dot{f} = \dfrac{V\cos\Theta}{r}\\ \dot{\Theta} = \dot{\theta} + \dfrac{V\cos\Theta}{r}\end{cases} \qquad (6-3.31)$$

5. 导弹射程

$$L = \bar{R}f \qquad (6-3.32)$$

6. 航偏角 ξ

发射点至导弹任一位置的矢径 $\boldsymbol{\rho}$ 在发射坐标系 oxz 平面内的投影与 ox 轴间的夹角，称为航偏角，以 ξ 表示。根据图 6－7 可得

$$\tan\xi = \frac{z}{x}$$

即

$$\xi = \tan^{-1}\frac{z}{x} \qquad (6-3.33)$$

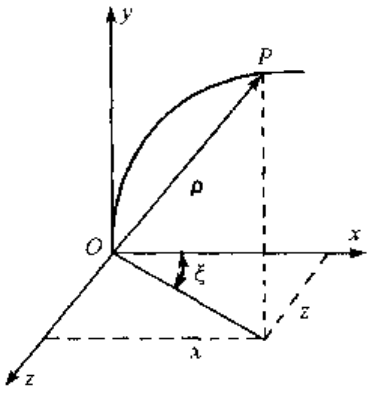


图 6－7

7. 弹下点对应的大地纬度

$$B = \tan^{-1}(1.0067385\tan\varphi_s) \qquad (6-3.34)$$

6.3.7 视加速度、视速度及其积分

惯性坐标系中各坐标轴方向上的视加速度分量、视速度分量及其积分为(省去上标“a”)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_x \\ \dot{W}_y \\ \dot{W}_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_a^g \cdot \boldsymbol{A}_g^b \begin{bmatrix} \dot{W}_{x_1} \\ \dot{W}_{y_1} \\ \dot{W}_{z_1} \end{bmatrix} \tag{6-3.35}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_x \\ \dot{W}_y \\ \dot{W}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} \tag{6-3.36}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{W}_x \\ \ddot{W}_y \\ \ddot{W}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{W}_x \\ \dot{W}_y \\ \dot{W}_z \end{bmatrix} \tag{6-3.37}$$

其中 $\boldsymbol{D}_a^g$ 中各矩阵元素为

$$\begin{cases} a'_{11} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_x^2)t_s^2 \\ a'_{12} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_y t_s^2 - \omega_z t_s \\ a'_{13} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_z t_s^2 + \omega_y t_s \\ a'_{21} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_y t_s^2 + \omega_z t_s \\ a'_{22} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_y^2)t_s^2 \\ a'_{23} = \dfrac{1}{2}\omega_y\omega_z t_s^2 - \omega_x t_s \\ a'_{31} = \dfrac{1}{2}\omega_x\omega_z t_s^2 - \omega_y t_s \\ a'_{32} = \dfrac{1}{2}\omega_y\omega_z t_s^2 + \omega_x t_s \\ a'_{33} = 1 - \dfrac{1}{2}(\omega^2 - \omega_z^2)t_s^2 \end{cases} \tag{6-3.38}$$

当滚动角很小($\gamma \approx 0$)时,其矩阵 $\boldsymbol{A}_g^b$ 为

$$\boldsymbol{A}_g^b = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\psi \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{6-3.39}$$

6.3.8 关机方程

由于导弹型号及其所采用的制导方案的不同,因此控制发动机关机的控制方程形式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

也不一样。例如以视速度及其积分为参数的摄动射程关机方程为

$$\begin{cases} W = \tilde{W} \\ W = k_1 W_x + k_2 W_y + k_3 W_z + k_4 \dot{W}_x + k_5 \dot{W}_y + k_6 \dot{W}_z \\ \qquad - (b_x \ddot{W}_x + b_y \ddot{W}_y + b_z \ddot{W}_z) + f(\Delta t) \\ W = k_1 \tilde{W}_x + k_2 \tilde{W}_y + k_3 \tilde{W}_z + k_4 \dot{\tilde{W}}_x \\ \qquad + k_5 \dot{\tilde{W}}_y + k_6 \dot{\tilde{W}}_z - (b_x \ddot{\tilde{W}}_x + b_y \ddot{\tilde{W}}_y + b_z \ddot{\tilde{W}}_z) \end{cases} \tag{6-3.40}$$

其中

$\tilde{W}$ 为标准关机装订量值(或关机特征值),预先给定且装订;

W 为实际关机装订量值(或关机特征值),由弹载计算机实时进行计算;

$k_j(j = 1,\cdots,6)$、$b_i(i = x,y,z)$ 为关机方程系数,对于给定射程其值为常数;

$f(\Delta t)$ 为引力补偿修正量,是时间的函数,在不同的飞行阶段,取不同的值。

综上述各方程,便得发射坐标系内的弹道导弹主动段运动微分方程组(略)。

§6.4 轨迹坐标系内的导弹主动段运动方程

这一节我们介绍由一级液体火箭发动机推动,并采用补偿捷联式制导方案的导弹主动段运动方程。由于导弹结构、动力装置、制导系统均与前者导弹不同,因而描述其运动规律的数学模型与前者也有很大差异。描述导弹质心运动规律的数学模型,不仅可在惯性坐标系或发射坐标系内建立,而且也可建立在轨迹坐标系内。下面就讨论弹道导弹在轨迹坐标系内的主动段运动方程。

6.4.1 导弹质心运动方程

1. 加速度矢 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 的投影

根据轨迹坐标系定义,速度矢 $\boldsymbol{V}$ 可表为

$$\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{x}_2^0 \tag{6-4.1}$$

其中,$\boldsymbol{x}_2^0$ 为轨迹坐标系 x_2 轴的单位矢量。

对上式求导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_2^0 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2^0}{\mathrm{d}t}V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_2^0 + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{V} \tag{6-4.2}$$

式中,$\boldsymbol{\Omega}_2$ 为速度矢 $\boldsymbol{V}$ 相对地球转动的角速度。

若 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 在轨迹坐标系各轴上的分量为 Ω_{x_2}、Ω_{y_2}、Ω_{z_2},那么

$$\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2^0 & \boldsymbol{y}_2^0 & \boldsymbol{z}_2^0 \\ \Omega_{x_2} & \Omega_{y_2} & \Omega_{z_2} \\ V & 0 & 0 \end{bmatrix} = V\Omega_{z_2}\boldsymbol{y}_2^0 - V\Omega_{y_2}\boldsymbol{z}_2^0 \tag{6-4.3}$$

由发射坐标系和轨迹坐标系定义可知,它们间的欧拉角仅有弹道倾角 θ 和弹道偏角

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

σ,因而 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 可表成

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

其在轨迹坐标系各轴上的投影

$$\begin{cases} \Omega_{x_2} = -\dot{\theta}\sin\sigma \\ \Omega_{y_2} = \dot{\sigma} \\ \Omega_{z_2} = \dot{\theta}\cos\sigma \end{cases} \tag{6-4.4}$$

将(6-4.3)式和(6-4.4)式代入(6-4.2)式,则得导弹质心加速度矢

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_2^0 + V\dot{\theta}\cos\sigma\boldsymbol{y}_2^0 - V\dot{\sigma}\boldsymbol{z}_2^0$$

其在轨迹坐标系各轴上的分量

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_{x_2} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dot{V} \\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_{y_2} = V\dot{\theta}\cos\sigma \approx V\dot{\theta} \\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_{z_2} = -V\dot{\sigma} \end{cases} \tag{6-4.5}$$

2. 作用力的投影

(1) 推力和控制力

如果导弹用来产生控制力和控制力矩的机构为燃气舵,那么处于发动机燃气流中的燃气舵,既产生控制力,同时也会出现舵面阻力。当计入舵面烧蚀影响时,舵面阻力和控制力梯度为

$$\begin{cases} X_{1c} = X_{1c0}(1+\eta t)\dfrac{P}{P_0} \\ R' = R'_0(1-\zeta t)\dfrac{P}{P_0} \end{cases} \tag{6-4.6}$$

其中

X_{1c0} 为4个舵的额定阻力;

R' 为一对舵的额定控制力梯度;

η、ζ 分别为舵阻力烧蚀系数和控制力梯度烧蚀系数;

P、P_0 分别为地面瞬时推力和地面额定推力。

发动机有效推力和推力各分量为

$$\begin{cases} P_e = P - X_{1c} \\ P_{x_2} = (P - X_{1c})\cos\alpha\cos\beta \approx (P - X_{1c})\cos\alpha \\ P_{y_2} = (P - X_{1c})(\sin\alpha\cos\gamma_c + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_c) \approx (P - X_{1c})\sin\alpha \\ P_{z_2} = (P - X_{1c})(\sin\alpha\sin\gamma_c - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_c) \approx -(P - X_{1c})\beta \end{cases} \tag{6-4.7}$$

控制力的分量为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} P_{\dot{R}_2} = -R'\delta_\varphi \sin\alpha \\ P_{\dot{\eta}_2} = R'\delta_\varphi \cos\alpha \\ P_{\dot{\zeta}_2} = -R'\delta_\psi \end{cases} \tag{6-4.8}$$

(2) 空气动力

$$\begin{cases} X_2 = -X = -C_x qS_m \\ Y_2 = C_y^\alpha \alpha qS_m \\ Z_2 = Z = -C_{y1}^\alpha \beta qS_m \end{cases} \tag{6-4.9}$$

(3) 重力分量

地球重力即为地球引力和地转离心 o(即牵连)惯性力矢量和。对于中近程导弹来说,将实际地球视为圆球体,不会引起多大的误差,同时也因其主动段射程小,地转离心力引起的引力偏斜可视为微量而不予考虑,且将其大小计入地球引力。这样,当地球为圆球体时的重力在轨迹坐标系各轴上的分量,可由发射坐标系与轨迹坐标系间的方向余弦关系式(2-5.3)导得,即

$$\begin{cases} g_{x_2} = -g\dfrac{x}{r}\cos\theta\cos\sigma - g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\sin\theta\cos\sigma + g\dfrac{z}{r}\sin\sigma \\ g_{y_2} = g\dfrac{x}{r}\sin\theta - g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\cos\theta \\ g_{z_2} = -g\dfrac{x}{r}\cos\theta\sin\sigma - g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\sin\theta\sin\sigma - g\dfrac{z}{r}\cos\sigma \end{cases}$$

略去二阶微量

$$\begin{cases} g_{x_2} = -g\dfrac{x}{r}\cos\theta - g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\sin\theta \\ g_{y_2} = g\dfrac{x}{r}\sin\theta - g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\cos\theta \\ g_{z_2} = -g\dfrac{\tilde{R}+y}{r}\sigma\sin\theta \end{cases} \tag{6-4.10}$$

(4) 柯氏惯性力

由(6-2.6)可知,柯氏惯性力可表示为

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}$$

其在轨迹坐标系中的分量

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2^0 & \boldsymbol{y}_2^0 & \boldsymbol{z}_2^0 \\ \omega_{x_2} & \omega_{y_2} & \omega_{z_2} \\ V & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2m(\omega_{z_2} V\boldsymbol{y}_2^0 - \omega_{y_2} V\boldsymbol{z}_2^0)$$

故

$$\begin{cases} F_{cx_2} = 0 \\ F_{cy_2} = -2m\omega_{z_2} V \\ F_{cz_2} = 2m\omega_{y_2} V \end{cases} \tag{6-4.11}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将地球自转角速度 ω 在发射坐标系各轴上的分量

$$\begin{cases}\omega_x = \omega\cos B\cos A\\ \omega_y = \omega\sin B\\ \omega_z = -\omega\cos B\sin A\end{cases}$$

投影于轨迹坐标系各轴上，应用发射坐标系与轨迹坐标系间的关系式，当略去二阶微量时，有

$$\begin{cases}\omega_{x_2} = \omega_x\cos\theta c\cos\sigma + \omega_y\sin\theta\cos\sigma - \omega_z\sin\sigma \approx \omega_x\cos\theta + \omega_y\sin\theta\\ \omega_{y_2} = \omega_y\cos\theta - \omega_x\sin\theta\\ \omega_{z_2} = \omega_x\cos\theta\sin\sigma + \omega_y\sin\theta\sin\sigma + \omega_z\cos\sigma \approx \omega_z\end{cases} \tag{6-4.12}$$

B，A 分别为发射点大地纬度和大地瞄准方位角。

将(6-4.12)代入(6-4.11)式，则得柯氏惯性力在轨迹坐标系中的分量

$$\begin{cases}F_{cx2} = 0\\ F_{cy2} = -2mV\omega_z\\ F_{cz2} = -2mV(\omega_x\sin\theta - \omega_y\cos\theta)\end{cases} \tag{6-4.13}$$

3. 导弹质心运动方程

有了诸力在轨迹坐标系各轴上的分量，且顾及(6-4.5)式，便可导出导弹质心在该坐标系内的动力学方程标量式

$$\begin{cases}\dot V = \frac{1}{m}[(P - X_{1c})\cos\alpha - R'\delta_\varphi\sin\alpha - C_xqS_m] - g(\frac{x}{r}\cos\theta + \frac{\tilde R + y}{r}\sin\theta)\\ \dot\theta = \frac{1}{V}\{\frac{1}{m}[(P - X_{1c})\sin\alpha + R'\delta_\varphi\cos\alpha + C_y^\alpha\alpha qS_m] + g(\frac{x}{r}\sin\theta - \frac{\tilde R + y}{r}\cos\theta)\} - 2\omega_z\\ \dot\sigma = \frac{1}{V}\{\frac{1}{m}[(P - X_{1c})\beta + R'\delta_\psi + C_y^\beta\beta qS_m] + g\frac{\tilde R + y}{r}\sigma\sin\theta\} + 2(\omega_x\sin\theta - \omega_y\cos\theta)\end{cases} \tag{6-4.14}$$

根据发射坐标系与轨迹坐标系间的方向余弦矩阵，且近似认为 $\cos\sigma \approx 1$、$\sin\sigma \approx \sigma$，则导弹质心相对发射坐标系的运动学方程为

$$\begin{cases}V_x = V\cos\theta\\ V_y = V\sin\theta\\ V_z = -V\sigma\end{cases} \tag{6-4.15}$$

由于捷联式惯性制导系统中的测量元件(加速度表)是固连于弹体轴的，因此其敏感值是视加速度在弹体坐标系各轴上的分量，即

$$\begin{cases}\dot W_{x_1} = \frac{1}{m}[(P - X_{1c}) - C_xqS_m\cos\alpha\cos\beta + C_y^\alpha\alpha qS_m\sin\alpha + C_y^\beta\beta qS_m\cos\alpha\sin\beta]\\ \dot W_{y_1} = \frac{1}{m}(C_y^\alpha\alpha qS_m\cos\alpha + C_xqS_m\sin\alpha\cos\beta - C_y^\beta\beta qS_m\sin\alpha\sin\beta + R'\delta_\varphi)\\ \dot W_{z_1} = \frac{1}{m}(-C_xqS_m\sin\beta - C_y^\beta\beta qS_m\cos\beta - R'\delta_\psi)\end{cases}$$

略去二阶微量时，则

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \dot{W}_{x_1} = \dfrac{1}{m}[(P - X_{1c}) - C_x qS_m \cos\alpha + C_y^{\alpha} \alpha qS_m \sin\alpha] \\ \dot{W}_{y_1} = \dfrac{1}{m}(C_y^{\alpha} \alpha qS_m \cos\alpha + C_x qS_m \sin\alpha + R'\delta_{\varphi}) \\ \dot{W}_{z_1} = \dfrac{1}{m}(- C_x qS_m \beta - C_y^{\beta} \beta qS_m - R'\delta_{\psi}) \end{cases} \tag{6-4.16}$$

6.4.2 姿态控制方程

姿态控制方程分为俯仰、偏航和滚动三个控制方程。但因滚动角为小量，故认为滚动控制方程 $\delta_{\gamma} = 0$。

由于弹上测量元件测量的 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 是相对惯性空间的，因而从惯性坐标系与弹体坐标系间方向余弦关系知，绝对俯仰角 $\tilde{\varphi}$ 和偏航角 $\tilde{\psi}$ 与相对俯仰角 φ 和偏航角 ψ 之间的关系分别为

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi + \omega_z t_s \\ \tilde{\psi} = \psi + \omega_y t_s \cos\varphi - \omega_x t_s \sin\varphi \end{cases}$$

求其导数

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi} + \omega_z \\ \dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi} + \omega_y \cos\varphi - \omega_x \sin\varphi - (\omega_y t_s \sin\varphi + \omega_x t_s \cos\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}$$

于是，俯仰和偏航控制方程为

$$\begin{cases} \delta_{\varphi} = a_0^{\varphi}[\tilde{\varphi} - \varphi_{cx}(t)] + a_1^{\varphi}\dot{\tilde{\varphi}} \\ \quad = a_0^{\varphi}[\varphi - (\varphi_{cx}(t) - \omega_z t_s)] + a_1^{\varphi}(\dot{\varphi} + \omega_z) \\ \delta_{\psi} = a_0^{\psi}\tilde{\psi} + a_1^{\psi}\dot{\tilde{\psi}} - a_1^{z}\dot{Z}_b \\ \quad = a_0^{\psi}(\psi + \omega_y t_s \cos\varphi - \omega_x t_s \sin\varphi) - a_1^{z}\dot{Z}_b \\ \quad + a_1^{\psi}[\dot{\psi} + \omega_y \cos\varphi - \omega_x \sin\varphi - (\omega_y t_s \sin\varphi + \omega_x t_s \cos\varphi)\dot{\varphi}] \end{cases} \tag{6-4.17}$$

其中 a_0^{φ}、a_1^{φ} 及 a_0^{ψ}、a_1^{ψ} 分别为俯仰和偏航的角度、角速度静态放大系数，a_1^{z} 为横向速度静态放大系数。它们均是时间的已知函数。而 $\dot{Z}_b$ 为导弹质心的横向偏移速度，称为横向速度，可由惯性坐标系与弹体坐标系间的方向余弦导得

$$\dot{Z}_b \approx \int_0^t [\dot{W}_{x_1}(-\psi - \omega_y t_s \cos\varphi + \omega_x t_s \sin\varphi) + \dot{W}_{z_1}]\,\mathrm{d}t \tag{6-4.18}$$

6.4.3 绕质心运动方程

根据“瞬时平衡”假设和作用在导弹上的空气动力矩和控制力矩，可直接写出略去滚动运动时的导弹“瞬时平衡”方程

$$\begin{cases} C_n^{\alpha} qS_m(x_y - x_z)\alpha + R'(x_{ry} - x_z)\delta_{\varphi} = 0 \\ C_n^{\alpha} qS_m(x_y - x_z)\beta + R'(x_{ry} - x_z)\delta_{\psi} = 0 \end{cases}$$

将(6-4.17)式和关系式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\varphi = \theta + \alpha \\ \psi = \sigma + \beta\end{cases}$$

代入上式,经整理可得

$$\begin{cases}\dot{\varphi} = \dfrac{a_0^{\varphi}}{a_1^{\varphi}}\left[\varphi_{\alpha}(t) - \theta - \omega_z t_s - \dfrac{\alpha}{A^{\varphi}}\right] - \omega_z \\ \dot{\psi} = \dfrac{-a_0^{\psi}}{a_1^{\psi}}\left[\sigma + \omega_y t_s\cos\varphi - \omega_x t_s\sin\varphi + \dfrac{\beta}{A^{\psi}} - \dfrac{a_1^{z}}{a_0^{\psi}}\dot{Z}_b\right] \\ \quad - \left[\omega_y\cos\varphi - \omega_z\sin\varphi - (\omega_y t_s\sin\varphi + \omega_x t_s\cos\varphi)\dot{\varphi}\right]\end{cases} \tag{6-4.19}$$

其中

$$\begin{cases}A^{\varphi} = \dfrac{R' a_0^{\varphi}(x_{ry} - x_z)}{R' a_0^{\varphi}(x_{ry} - x_z) + C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)} \\ A^{\psi} = \dfrac{R' a_0^{\psi}(x_{ry} - x_z)}{R' a_0^{\psi}(x_{ry} - x_z) + C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)}\end{cases} \tag{6-4.20}$$

6.4.4 关机方程

由于导弹的射程控制系统是采用补偿捷联式惯性控制系统,因此关机方程为

$$\tilde{W} = W_{x_1} + \int_0^t \left[K_1(W_{x_1} - \tilde{W}_{x_1}) + K_2 W_{y_1} + K_3\Delta\varphi\right]\mathrm{d}t \tag{6-4.21}$$

式中,$\tilde{W}_{x_1}$ 为标准轴向视速度,$K_i(i = 1,2,3)$ 为补偿系数,$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{\alpha}(t) + W_z t_s$ 为俯仰角偏差。

6.4.5 其他辅助方程

1. 联系方程

$$\begin{cases}\varphi = \theta + \alpha \\ \psi = \sigma + \beta\end{cases} \tag{6-4.22}$$

2. 重量方程

$$\begin{cases}G = G_0 - \int_0^t \dot{G}\mathrm{d}t \\ G_y = G_{y0} - \int_0^t \dot{G}_y\mathrm{d}t \\ G_R = G_{R0} - \int_0^t \dot{G}_R\mathrm{d}t\end{cases} \tag{6-4.23}$$

3. 重量和质量关系方程

$$G = m\tilde{g}_0 \tag{6-4.24}$$

$\tilde{g}_0 = 9.80665\mathrm{m/s}^2$ 为质量换算常数。

4. 重力加速度

$$g = g_0\left(\frac{\tilde{R}}{r}\right)^2 \tag{6-4.25}$$

$g_0 = \tilde{g}_0 = 9.80665\mathrm{m/s}^2$ 为地面重力加速度。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

5. 高程及地心距离

$$\begin{cases} h = r - \tilde{R} \\ r = \sqrt{x^2 + (y + \tilde{R})^2 + z^2} \end{cases} \tag{6-4.26}$$

6. 飞行马赫数及速度头

$$\begin{cases} M = \dfrac{V}{a} = \dfrac{V}{a_0}\sqrt{\dfrac{T_0}{T}} \\ q = \dfrac{1}{2}\rho V^2 \end{cases} \tag{6-4.27}$$

式中，T_0、a_0 分别为地面标准温度和音速，其值参见附录3。

7. 过载

过载是弹道学中的一个重要概念，广泛应用于导弹结构设计和弹道特性的分析。过载是指作用于导弹上的除重力以外的所有外力矢量和 N 与其重量之比，常用 n 表示，即

$$n = \frac{N}{G}$$

因为合作用力 N 是空间矢量，所以过载 n 也是一空间矢量。根据矢量的性质，将 n 沿弹体坐标系各轴进行分解，其分量为

$$\begin{cases} n_x = \dfrac{N_{x_1}}{mg} = \dfrac{\dot{W}_{x_1}}{g} = \dfrac{\dot{W}_{x_1}}{g_0} \\ n_y = \dfrac{N_{y_1}}{mg} = \dfrac{\dot{W}_{y_1}}{g} = \dfrac{\dot{W}_{y_1}}{g_0} \\ n_z = \dfrac{N_{z_1}}{mg} = \dfrac{\dot{W}_{z_1}}{g} = \dfrac{\dot{W}_{z_1}}{g_0} \end{cases} \tag{6-4.28}$$

n_x、n_y、n_z 分别称为轴向过载、法向过载和横向过载。

同样道理，过载 n 也可沿轨迹坐标各轴进行分解，它对应于 x_2 轴、y_2 轴和 z_2 轴的过载分量分别称为切向过载、法向过轴和横向过载。根据过载分量与重力加速度分量值的大小，可分析导弹弹道的空间特性。

8. 推进剂混合比

由(3-1.13)式知，推进剂混合比为

$$K = \frac{\dot{G}_y}{\dot{G}_R} \tag{6-4.29}$$

综合以上结果，便得导弹主动段运动微分方程组

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
\dot{V} = \dfrac{1}{m}[(P - X_{1c})\cos\alpha - C_x q S_m - R'\delta_\varphi \sin\alpha] - g\left(\dfrac{x}{r}\cos\theta + \dfrac{\bar{R} + y}{r}\sin\theta\right) \\
\dot{\theta} = \dfrac{1}{V}\left\{\dfrac{1}{m}[(P - X_{1c})\sin\alpha + R'\delta_\varphi \cos\alpha + C_y^\alpha \alpha q S_m] + g\left(\dfrac{x}{r}\sin\theta - \dfrac{\bar{R} + y}{r}\cos\theta\right)\right\} - 2\omega_z \\
\dot{\sigma} = \dfrac{1}{V}\left\{\dfrac{1}{m}[(P - X_{1c})\beta + R'\delta_\psi + C_{y^1}^\alpha \beta q S_m] + g\dfrac{\bar{R} + y}{r}\sigma\sin\theta\right\} + 2(\omega_x \sin\theta - \omega_y \cos\theta) \\
\dot{\varphi} = \dfrac{a_0^\varphi}{a_1^\varphi}[\varphi_{cx}(t) - \theta - \omega_z t_s - \dfrac{\alpha}{A^\varphi}] - \omega_z \\
\dot{\psi} = \dfrac{-a_0^\psi}{a_1^\psi}[\sigma + \omega_y t_s \cos\varphi - \omega_x t_s \sin\varphi + \dfrac{\beta}{A^\psi} - \dfrac{a_1^z}{a_0^\psi}\dot{Z}_b] \\
\qquad - \omega_y \cos\varphi + \omega_x \sin\varphi + (\omega_y t_s \sin\varphi + \omega_x t_s \cos\varphi)\dot{\varphi} \\
\dot{x} = V\cos\theta \\
\dot{y} = V\sin\theta \\
\dot{z} = -V\sigma \\
\widetilde{W} = W_{x_1} + \displaystyle\int_0^t [K_1(W_{z_1} - \widetilde{W}_{x_1}) + K_2 \dot{W}_{y_1} + K_3 \Delta\varphi]\mathrm{d}t \\
\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{cx}(t) + \omega_z t_s \\
\alpha = \varphi - \theta \\
\beta = \psi - \sigma \\
\delta_\varphi = a_0^\varphi[\varphi - (\varphi_{cx}(t) - \omega_z t_s)] + a_1^\varphi(\dot{\varphi} + \omega_z) \\
\delta_\psi = a_0^\psi(\psi + \omega_y t_s \cos\varphi - \omega_x t_s \sin\varphi) - a_1^z \dot{Z}_b \\
\qquad + a_1^\psi[\dot{\psi} + \omega_y \cos\varphi - \omega_x \sin\varphi - (\omega_y t_s \sin\varphi + \omega_x t_s \cos\varphi)\dot{\varphi}] \\
\ddot{Z}_b = -\dot{W}_{x_1}(\psi + \omega_y t_s \cos\varphi - \omega_x t_s \sin\varphi) + \dot{W}_{z_1} \\
\dot{W}_{x_1} = \dfrac{1}{m}[(P - X_{1c}) - C_x q S_m \cos\alpha + C_y^\alpha \alpha q S_m \sin\alpha] \\
\dot{W}_{y_1} = \dfrac{1}{m}(C_y^\alpha \alpha q S_m \cos\alpha + C_x q S_m \sin\alpha + R'\delta_\varphi) \\
\dot{W}_{z_1} = \dfrac{1}{m}[-C_x q S_m \beta - C_{y^1}^\alpha \beta q S_m - R'\delta_\psi] \\
n_x = \dfrac{\dot{W}_{x_1}}{\tilde{g}_0} \\
n_y = \dfrac{\dot{W}_{y_1}}{\tilde{g}_0} \\
n_z = \dfrac{\dot{W}_{z_1}}{\tilde{g}_0} \\
G = G_0 - \displaystyle\int_0^t \dot{G}\mathrm{d}t
\end{cases}
$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
G_y = G_{y0} - \int_0^t \dot{G}_y \mathrm{d}t \\
G_R = G_{R0} - \int_0^t \dot{G}_R \mathrm{d}t \\
K = \dfrac{\dot{G}_y}{\dot{G}_R} \\
A^{\varphi} = \dfrac{R' a_0^{\varphi}(x_{ry} - x_z)}{R' a_0^{\varphi}(x_{ry} - x_z) + C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)} \\
A^{\psi} = \dfrac{R' a_0^{\psi}(x_{ry} - x_z)}{R' a_0^{\psi}(x_{ry} - x_z) + C_n^{\alpha} q S_m (x_y - x_z)} \\
h = r - \tilde{R} \\
r = \sqrt{x^2 + (y + \tilde{R})^2 + z^2} \\
q = \dfrac{1}{2}\rho V^2 \\
M = \dfrac{V}{a} = \dfrac{V}{a_0}\sqrt{\dfrac{T_0}{T}} \\
m = \dfrac{G}{g_0} \\
g = g_0 (\dfrac{\tilde{R}}{r})^2 \\
\omega_x = \omega \cos B \cos A \\
\omega_y = \omega \sin B \\
\omega_z = -\omega \cos B \sin A \\
K_1 = K_1(t) \\
K_2 = K_2(t) \\
K_3 = K_3(t)
\end{cases}
\tag{6-4.30}
$$

当给定初值及标准条件后，对上述方程组进行积分，便可求出导弹主动段所有运动参数。

§ 6.5 惯性坐标系内的主动段导航方程及其实时解

根据目标点和发射点数据以及导弹的现时运动参数，按控制函数数学表达式进行实时计算的惯性制导方法中的运动参数，如果是由弹载惯性元器件实时进行测量，弹载计算机进行计算获得，那么在惯性坐标系内建立描述导弹质心运动规律的数学模型，研究其运动特性更为方便。

6.5.1 视加速度和视速度

在前边的章节中已多处涉及到，且在导弹的制导理论中也常用到了视加速度和视速

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

度的概念，因此，这里专门对它们作一介绍。

我们知道，惯性制导中的测量元件——加速度表是利用物体具有的惯性设计而成的。

在加速度表中，结构最为简单的要算弹簧式加速度表了。这种加度度表一般由壳体、固连于壳体的弹簧以及沿壳体轴线 S 方向滑动的质量为 m 的滑块(敏感元件)所组成(图 6－8)。

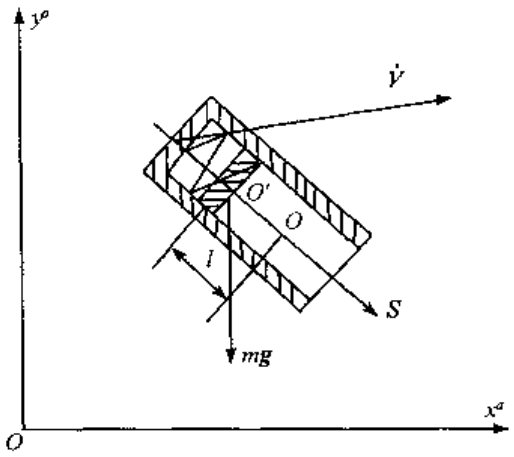


图 6－8

当壳体相对于惯性坐标系以加速度 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 运动时，因惯性作用，假设滑块由初始位置 o 移动到位置 o' 的位移大小为 l，那么在忽略弹簧质量和滑块与壳体内壁间摩擦力的情况下，由牛顿第二定律可得滑块在 S 方向上的运动方程

$$cl + mg_s = -m\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} + m\dot{V}_s \quad (6-5.1)$$

式中，V_s 及 g_s 分别表示壳体的绝对加速度 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 和引力加速度矢 $\boldsymbol{g}$ 在 S 方向上的投影；c 为弹簧的弹性系数；cl 为弹簧变形后作用于滑块上的弹性力；$-m\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}$ 为滑块相对壳体位移时所产生的惯性力。当弹簧的弹性系数较大而滑块质量 m 较小时，惯性力项 $-m\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}$ 是微量，可以略去不计，于是上式简化为

$$cl + mg_s = m\dot{V}_s$$

或

$$\dot{V}_s - g_s = \frac{c}{m}l \quad (6-5.2)$$

由上式得知，位移是加速度的输出，而其与 $\frac{c}{m}$ 的乘积 $\frac{c}{m}l$ 之量纲，尽管也是加速度的量纲，但它反映的并非是导弹的真实加速度．而是绝对加速度 $\dot{\boldsymbol{V}}$ 与引力加速度 $\boldsymbol{g}$ 在加速度表敏感轴 S 方向上的投影差，其差值 $\dot{V}_s - g_s$ 称为加速度表敏感轴方向的视加速度，用 $\dot{W}_s$ 表示。因此，(6－5.2) 式又可表成

$$\dot{W}_s = \dot{V}_s - g_s \quad (6-5.3)$$

若沿惯性坐标系各轴分别安装一只加速度表，其敏感轴方向与坐标轴方向一致．那么根据加速度表工作原理，同样可以测出各轴方向上的视加速度 $\dot{W}_i(i = x, y, z)$，即

$$\begin{cases} \dot{W}_i = \dot{V}_i - g_i \\ \dot{\boldsymbol{W}} = \dot{\boldsymbol{V}} - \boldsymbol{g} \end{cases} \quad (6-5.4)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{W}}$ 为视加速度矢。

积分上式，则得视速度分量及视速度矢

$$\begin{cases} W_i = V_i - g_i \\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{g} \end{cases} \quad (6-5.5)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\begin{cases} W_i = \int_0^t \dot{W}_i \mathrm{d}t \\ g_i = \int_0^t g_i \mathrm{d}t \end{cases} \tag{6-5.6}$$

V_i 为导弹绝对速度分量，g_i 为引力加速度分量的积分。

对(5－2.4)式积分二次，则得

$$\ddot{W}_i = i - g_i \tag{6-5.7}$$

其中

$$\begin{cases} \dot{W}_i = \int_0^t W_i \mathrm{d}t = \int_0^t \int_0^\tau \dot{W}_i \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\ \ddot{g}_i = \int_0^t g_i \mathrm{d}t = \int_0^t \int_0^\tau g_i \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \end{cases} \tag{6-5.8}$$

$\dot{W}_i$ 称为视位移矢在惯性坐标系各轴上的分量；

$\ddot{g}_i$ 为引力加速度分量的二次积分。

从以上看出，安装在弹上的加速度表不能直接测量出导弹的真实加速度，而只能敏感除引力以外的其他力的合力产生的惯性加速度，即视加速度。这是因为在地球引力场飞行的导弹，受有地球引力的作用，而装在弹上的加速度表，同样不可避免地也受到地球引力作用的缘故。

我们知道，在主动段，导弹是在控制系统作用下，按照给定的飞行程序方案飞行的。在惯性制导中，由于加速度表在弹上安装位置的不同，构成了不同的制导方案。在惯性平台计算机制导方案中，三只加速度表是分别沿惯性平台空间直角坐标系三坐标轴安装的，因此分别测得各轴方向上的视加速度值。如果加速度表固连于弹体，且沿弹体坐标系各坐标轴方向上安装，那么这种制导方案称为捷联式惯性制导方案，其加速度表敏感值则为视加速度矢在弹体坐标系各坐标轴方向上的分量，而惯性坐标系内的视加速度分量可由(2－3.15)式或(2－6.3)式得出，如

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_{xa} \\ \dot{W}_{ya} \\ \dot{W}_{za} \end{bmatrix} = D_a^b \begin{bmatrix} \dot{W}_{x_1} \\ \dot{W}_{y_1} \\ \dot{W}_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W}_{x_1} \\ \dot{W}_{y_1} \\ \dot{W}_{z_1} \end{bmatrix} \tag{6-5.9}$$

其中 D_a^b 为弹体坐标系与惯性坐标系间的方向余弦矩阵式，各矩阵元素如(2－3.17)式所示。$\dot{W}_{x_1}$、$\dot{W}_{y_1}$、$\dot{W}_{z_1}$ 为视加速度矢在弹体坐标系各轴方向上的分量。

6.5.2 引力加速度表达式

引力加速度矢在惯性坐标系各坐标轴方向上的分量的计算，可根据不同的精度要求选用不同的地球重力场模型，如

$$\begin{bmatrix} g_{xa} \\ g_{ya} \\ g_{za} \end{bmatrix} = \frac{g_r}{r} \begin{bmatrix} x_a + R_{0xa} \\ y_a + R_{0za} \\ z_a + R_{0za} \end{bmatrix} + \frac{g_\omega}{\omega} \begin{bmatrix} \omega_{xa} \\ \omega_{ya} \\ \omega_{za} \end{bmatrix} \tag{6-5.10}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2} + \dfrac{\mu}{r^4}(5\sin^2\varphi_s - 1) \\ g_\omega = -\dfrac{2\mu}{r^4}\sin\varphi_s \\ r = \sqrt{(x_a + R_{0xa})^2 + (y_a + R_{0ya})^2 + (z_a + R_{0za})^2} \\ \varphi_s = \sin^{-1}\left[\dfrac{(x_a + R_{0xa})\omega_{xa} + (y_a + R_{0ya})\omega_{ya} + (z_a + R_{0za})\omega_{za}}{r\omega}\right] \\ \quad = \sin^{-1}\left[\dfrac{x_a\omega_{xa} + y_a\omega_{ya} + z\omega_{za}}{r\omega} + \dfrac{R_{0b}}{r}\right] \\ R_{0b} = \dfrac{R_{0xa}\omega_{xa} + R_{0ya}\omega_{ya} + R_{0za}\omega_{za}}{\omega} = R_0\sin\varphi_{s0} \end{cases} \tag{6-5.11}$$

式中 x_a，y_a，z_a，R_{0xa}，R_{0ya}，R_{0za}，ω_{xa}，ω_{ya}，ω_{za}，g_{xa}，g_{ya}，g_{za} 为相对惯性坐标系的值。

6.5.3 状态方程及其实时解

在惯性坐标系内，导弹质心运动状态方程为

$$\begin{cases} \dot{V}_{xa} = \dot{W}_{xa} + g_{xa} \\ \dot{V}_{ya} = \dot{W}_{ya} + g_{ya} \\ \dot{V}_{za} = \dot{W}_{za} + g_{za} \\ \dot{x}_a = V_{xa} \\ \dot{y}_a = V_{ya} \\ \dot{z}_a = V_{za} \end{cases} \tag{6-5.12}$$

为了便于弹载计算机快速、精确地计算，导弹运动参数的获得不是采用一般的数值积分方法，而是利用逐次递推的方法获得，得到的结果与数值积分方法结果完全相同。

先研究

$$\dot{V}_{xa} = \dot{W}_{xa} + g_{xa}$$

取微小时间间隔 $T = t_j - t_{j-1}$ 区间的积分

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{V}_{xa}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{W}_{xa}\,\mathrm{d}t + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_{xa}\,\mathrm{d}t$$

近似得

$$V_{xa_j} - V_{xa_{j-1}} \approx \Delta W_{xa_j} + \frac{g_{xa_{j-1}} + g_{xa_j}}{2}T$$

式中

$$\Delta W_{xa_j} = W_{xa_j} - W_{xa_{j-1}}$$

为视加速度在 T 时间间隔内的增量输出值，故

$$V_{xa_j} \approx V_{xa_{j-1}} + \Delta W_{xa_j} + \frac{g_{xa_{j-1}} + g_{xa_j}}{2}T \tag{6-5.13}$$

同理

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} V_{ya_j} \approx V_{ya_{j-1}} + \Delta W_{ya_j} + \dfrac{g_{ya_{j-1}} + g_{ya_j}}{2} T \\ V_{xa_j} \approx V_{xa_{j-1}} + \Delta W_{xa_j} + \dfrac{g_{xa_{j-1}} + g_{xa_j}}{2} T \end{cases} \tag{6-5.14}$$

再来研究

$$\dot{x}_a = V_{xa}$$

取 T 时间间隔的积分

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}_a \mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}}^{t_j} V_{xa} \mathrm{d}t$$

近似值为

$$x_{a_j} \approx x_{a_{j-1}} + \left(V_{xa_{j-1}} + \frac{1}{2}\Delta V_{xa_j}\right) T$$

式中

$$\Delta V_{xa_j} \approx \Delta W_{xa_j} + g_{xa_{j-1}} T$$

代入上式得

$$x_{a_j} = x_{a_{j-1}} + \left(V_{xa_{j-1}} + \frac{1}{2}\Delta W_{xa_j} + \frac{T}{2} g_{xa_{j-1}}\right) T \tag{6-5.15}$$

同理得

$$\begin{cases} y_{a_j} = y_{a_{j-1}} + \left(V_{ya_{j-1}} + \dfrac{1}{2}\Delta W_{ya_j} + \dfrac{T}{2} g_{ya_{j-1}}\right) T \\ z_{a_j} = z_{a_{j-1}} + \left(V_{za_{j-1}} + \dfrac{1}{2}\Delta W_{za_j} + \dfrac{T}{2} g_{za_{j-1}}\right) T \end{cases} \tag{6-5.16}$$

将以上结果整理得导弹在 t_j 时刻的速度、位置的递推公式为

$$\begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \\ V_{za} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \\ V_{za} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} \Delta W_{xa} \\ \Delta W_{ya} \\ \Delta W_{za} \end{bmatrix}_j + \frac{T}{2}\left[\begin{bmatrix} g_{xa} \\ g_{ya} \\ g_{za} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} g_{xa} \\ g_{ya} \\ g_{za} \end{bmatrix}_j\right] \tag{6-5.17}$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}_{j-1} + T\left[\begin{bmatrix} V_{xa} \\ V_{ya} \\ V_{za} \end{bmatrix}_{j-1} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Delta W_{xa} \\ \Delta W_{ya} \\ \Delta W_{za} \end{bmatrix}_j + \frac{T}{2}\begin{bmatrix} g_{xa} \\ g_{ya} \\ g_{za} \end{bmatrix}_{j-1}\right] \tag{6-5.18}$$

以远程导弹弹道为例进行了大量的计算，至关机点速度计算累积误差不超过0.001m/s，位置计算的累积误差不超过0.5m，完全满足制导控制的要求。

对于速率捷联惯性系统而言，因加速度表与弹体固连，在周期内得到的只是视速度在弹体坐标系内的增量 ΔW_{x_1}，ΔW_{y_1}，ΔW_{z_1}，故需按(6-5.9)式或(2-6.3)式将弹体坐标系中的速度增量转换到惯性坐标系中去，如

$$\begin{bmatrix} \Delta W_{xa} \\ \Delta W_{ya} \\ \Delta W_{za} \end{bmatrix}_j = \boldsymbol{D}_a^b \begin{bmatrix} \Delta W_{x_1} \\ \Delta W_{y_1} \\ \Delta W_{z_1} \end{bmatrix}_j \tag{6-5.19}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§6.6 主动段运动参数分析

为了解导弹主动段运动的物理过程，以便对主动段的飞行弹道进行定性分析，我们以两级远程弹道导弹为例，简要介绍主动段几个至关重要的运动参数随时间的变化规律。

6.6.1 切向加速度 $\dot{V}(t)$ 和速度

1. 切向加速度

导弹切向加速度的大小取决于作用在它上面的力，但诸力中起重要作用的是发动机推力、空气动力和地球引力。在只考虑上述三种力作用情况下的导弹切向加速度可近似表为

$$\dot{V}(t) = \frac{P_e}{m}\cos\alpha - \frac{X}{m} - g\sin\theta$$

由上式看出，在上述三种作用力中，发动机推力则是导弹加速飞行的主要作用力，不管冲角 $\alpha > 0$ 或 $\alpha < 0$，其 $\frac{P_e}{m}\cos\alpha > 0$。而空气阻力 $\frac{X}{m}$ 和地球引力的切向分量 $g\sin\theta$ 均与导弹飞行方向相反，其作用结果必然使切向加速度 $\dot{V}(t)$ 减小。由于等式右端第一项值远大于后面两项值之和，因而导弹切向加速度 $\dot{V}(t) > 0$。

根据弹道计算结果描绘出的导弹主动段切向加速度随时间变化的规律如图 6 - 9 所示。

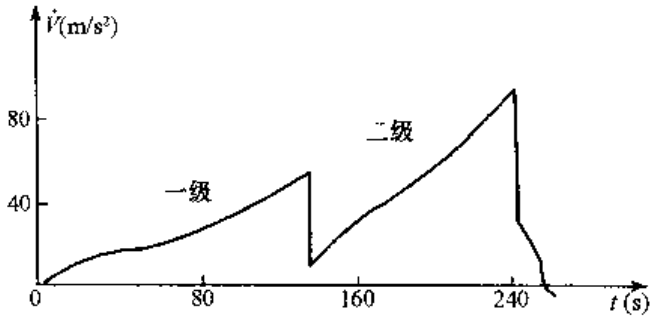


图 6 - 9

在一级基本段，导弹在初始飞行的一段时间内，由于发动机推力在较短时间内迅速达到额定值和此时的空气阻力对切向加速度的影响也不大，因此 $\dot{V}(t)$ 随着推力的急剧增大而增大。尔后，在发动机高度特性的影响下，推力缓慢增加；地球引力的切向分量随着导弹质量减少和弹道倾角的不断减小也逐渐减小；而空气阻力虽然随着飞行速度的增大在一段时间内是增加的，但与其他作用力相比较，它不起主要作用，况且，在以后的一段时间内，它又因空气密度随飞行高度的增高而急剧下降的缘故，却又迅速减小，因此切向加速度一直是增加的，其曲线呈现上凹形状(图 6 - 9)。

一级预令关机后，由于空气阻力较小以及导弹质量和地球引力切向分量变化不大，因而 $\dot{V}(t)$ 随推力的急剧下降而迅速地减小。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

二级基本段飞行时，由于导弹质量和空气阻力较小以及因弹道倾角逐渐变小，而使引力在切向上的分量也越来越小，因此切向加速度 $\dot{V}(t)$ 是逐渐增加的，而且其曲线也呈现上凹形状。另外，虽然二级推力和推力变化率没有一级大，但因导弹质量比一级小得多，所以切向加速度的变化率却比一级大。

二级预令后，由于发动机推力迅速减小直至为零，所以在引力作用下导弹切向加速度也随之减小，直至为零或出现负值。

2. 速度 $V(t)$

由关系式

$$V(t) = \int_0^t \dot{V}(t)\mathrm{d}t$$

可知，速度的变化规律完全取决于加速度 $\dot{V}(t)$ 的变化特性。由于加速度在主动段始终为正，故 $V(t)$ 曲线在主动段一直是上升的；同时也因为高空时空气极度稀薄，阻力下降，使二级加速度 $\dot{V}(t)$ 增加较快，所以二级的速度也比一级增加的要快些。只是到了二级预令后，由于推力的突然减小引起加速度减小，才使速度上升缓慢。因此，主动段速度曲线大部分呈上凹形状，而只有在二级预令后不长的一段时间内，曲线才呈下凹形状(图 6 - 10)。

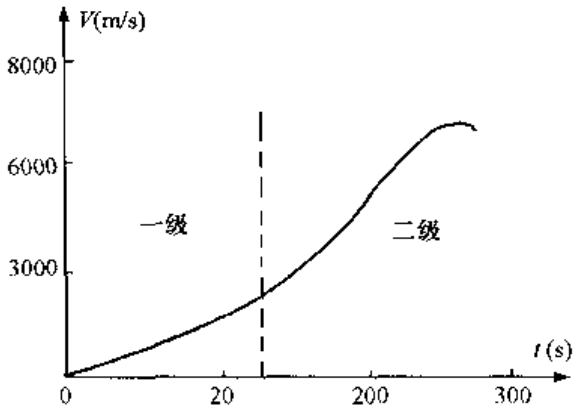


图 6 - 10

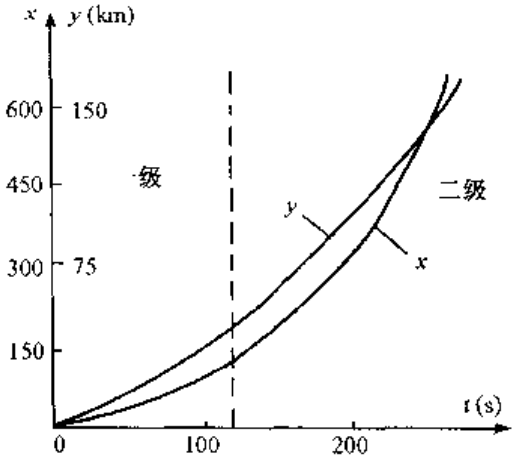


图 6 - 11

虽然二级发动机推力比一级小得多，但其加速度的增长却比一级快，这主要是由于一二级分离后抛掉了一级壳体，减轻了导弹的结构重量，使二级发动机的能量更多地用于运载有效载荷上的缘故。这也正是多级火箭的一个突出优点。也正因为如此，人们为在主动段终点获得较大的速度而又节省能量，才往往采用两级乃至多级的运载火箭的。

6.6.2 质心坐标 $x(t)$ 及 $y(t)$

从关系式

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t V_x(t)\mathrm{d}t \\ y(t) = \int_0^t V_y(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

不难看出，坐标的变化取决于 $V_x(t)$ 和 $V_y(t)$。而 $V_x(t)$ 和 $V_y(t)$ 在主动段均为正值，且随时间的增加而增加，所以质心坐标 $x(t)$、$y(t)$ 也是随时间增加而增加的。因二级速度变化比一级大，故二级坐标曲线比一级上凹得厉害(图 6 - 11)。此外，由于导弹是垂直发射的，初始飞行时弹道倾角 θ 较大，发动机推力主要用于克服地球引力以增加高度上，所以在主动段一级的前几十秒内坐标 $y(t)$ 增加较快。以后，随着弹道倾角的逐渐减小和速度 $V_x(t)$ 远大于 $V_y(t)$，因而坐标 $x(t)$ 大于 $y(t)$。就整个主动段来看，坐标 $x(t)$ 值要比 $y(t)$ 值大得多。

6.6.3 马赫数 $M(t)$ 和速度头 $q(t)$

马赫数 M 和速度头 q 随时间变化的曲线如图 6 - 12 所示。

由于马赫数 $M = \dfrac{V}{a}$，而音速随时间或高度的变化不甚显著，故 $M(t)$ 的变化规律基本上与 $V(t)$ 相同，即随时间的增加而增加。从关系式 $q = \dfrac{1}{2}\rho V^2$ 可知，速度头 $q(t)$ 的变化规律受大气密度 $\rho(t)$ 和飞行速度 $V(t)$ 的影响。飞行高度不大时，速度对 $q(t)$ 的影响起主导作用，即 $q(t)$ 随速度的增加而增加；当飞行高度较高时，大气密度 $\rho(t)$ 随高度的增加而减少的变化规律对 $q(t)$ 影响起主导作用，因此 $q(t)$ 又随着 $\rho(t)$ 的下降而急剧减小；二级飞行时，因大气极度稀薄，致使密度 $\rho(t) = 0$，故速度头 $q(t)$ 不大，且逐渐也趋于零。

6.6.4 冲角 $\alpha(t)$ 和发动机当量摆动角 $\delta_\varphi(t)$

根据导弹的飞行特点和性能要求，在程序转弯飞行段，首先给出飞行冲角 $\alpha(t)$ 的变化规律(图 6 - 13)，即

$$\alpha(t) = 4\bar{\alpha}e^{a(t_1-t)}[e^{a(t_1-t)} - 1]$$

式中，t_1 为飞行程序开始转弯时间，$\bar{\alpha}$ 为程序转弯飞行段上冲角的最大绝对值，a 为选定的某一常数。

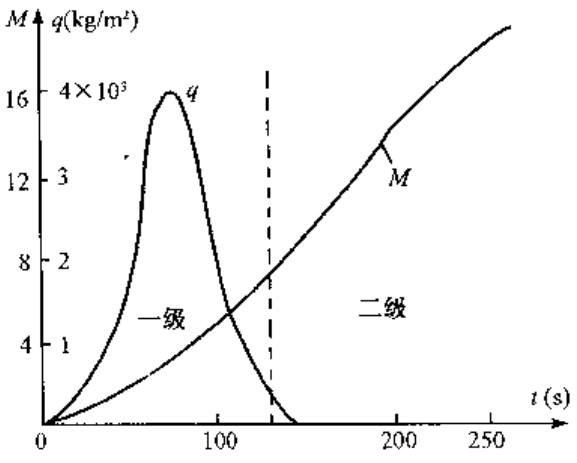


图 6 - 12

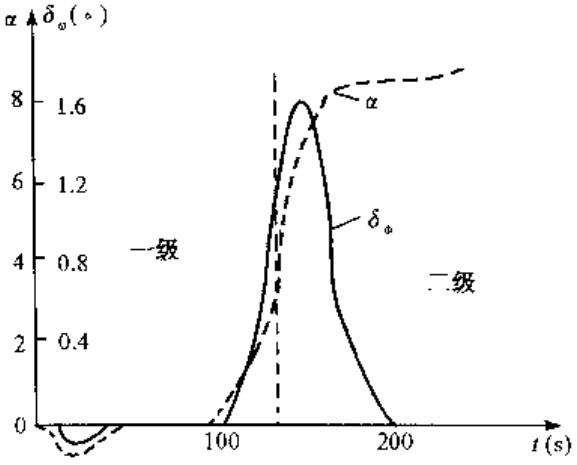


图 6 - 13

在一级基本段的垂直飞行段，由于要求 $\varphi = \theta = 90°$，所以 $\alpha(t) = 0$；在进入跨音速区

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

以前的一段飞行时间内，为使弹轴较快转动，且能在进入跨音速飞行时刻的飞行程序角接近一级预令时的飞行程序角，因此冲角 $\alpha(t)$ 应为负值，这样便能产生较大的负法向力，并与引力的法向分量共同作用于导弹使弹道向目标方向弯曲；在跨音速飞行及其以后的一段时间内，为减小空气动力对导弹运动的影响，角 $\alpha(t)$ 应接近为零。在一级预令后的一级和二级飞行段，为使导弹作等程序飞行，因而冲角 $\alpha(t) > 0$。

从图 6 - 13 看出，一级发动机俯仰当量摆动角 $\delta_\varphi(t)$ 与冲角 $\alpha(t)$ 有着大体相同的变化规律。这是由于俯仰当量摆动角、程序角与冲角存在着一定内在联系的缘故。二级发动机俯仰当量摆动角 δ_φ，则以开始增加，尔后逐渐减小，直至减小为零的规律变化。

6.6.5 法向加速度 $V\dot{\theta}$

由法向加速度近似关系式

$$V\dot{\theta} = \frac{1}{m}(P_e\sin\alpha + Y) - g\cos\theta$$

及

$$\varphi = \theta + \alpha$$

可知，在垂直飞行段，由于 $\alpha = 0$，$\theta =$ 常数（即 $\dot{\theta}(t) = 0$），所以 $V\dot{\theta} = 0$；在程序转弯段，虽然 $V > 0$，但因 $\dot{\theta} < 0$，故 $V\dot{\theta} < 0$，而且随 $\dot{\theta}$ 变化不甚显著；接近一二级分离时，因空气稀薄（即升力 $Y = 0$）和 α 取较大的正值，所以绝对值 $\left|\frac{1}{m}P_e\sin\alpha - g\cos\theta\right|$ 逐渐减小，从而使 $V\dot{\theta}$ 的绝对值也随之减小，即转弯越来越慢；当 $\frac{1}{m}P_e\sin\alpha > g\cos\theta$ 时，法向加速度 $V\dot{\theta}$ 为正值，弹道呈现上弯趋势。当二级发动机关闭，控制力随之消失时，弹道又在引力法向分量的作用下，呈现下弯趋势，法向加速度 $V\dot{\theta}$ 再次为负值（图 6 - 14）。

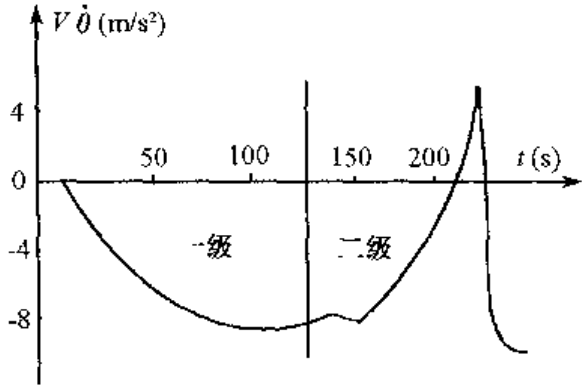


图 6 - 14

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第七章　弹道导弹的被动段运动

弹道导弹从头体分离至击中目标的飞行弹道称为被动段弹道。在被动段，一般导弹不受推力和控制力及其力矩的作用，它是依靠在主动段终点获得的能量自由飞向目标的。

根据导弹飞行中受不受空气动力的作用、被动段弹道又分为自由段和再入段两部分。在自由段，导弹一般只受地球引力作用，如果把地球视为均质圆球体(即地球引力场为有心力场)，那么导弹将按照椭圆弹道规律飞行。有关椭圆弹道理论，将在第九章中专门进行讨论。在再入段，导弹除受地球引力作用外，同时还受空气动力和空气动力矩的作用。由于气动加热引起的烧蚀作用，不仅使导弹质量发生变化，而且使其外部形状产生变形，从而引起气动力和气动力矩急剧变化，因此导弹的再入段运动是十分复杂的。为使问题简化和讨论方便，所以在探讨再入段弹道时，通常是将导弹作为一个质量集中于质心的质点来研究，此时导弹受地球引力和空气阻力作用。在确定再入段弹道时，为计算弹头的装订诸元和进一步提高导弹落点精度，则将导弹视为一个质量不断变化的转动刚体，此时导弹除受有上述作用力外，还应顾及气动升力和气动力矩对其运动的影响。

本章着重讨论以下三个问题，导弹为质点时的被动段运动方程；导弹为刚体时的被动段运动方程；导弹被动段弹道特性分析。

§7.1　导弹为质点时的运动微分方程

如上所述，导弹被动段的运动，常以质点动力学问题进行研究，这较之主动段的运动要简单得多。此时，导弹主要受地球引力及空气阻力作用。如果讨论导弹相对转动着的地球的运动时，则还需考虑因地球旋转而产生的牵连惯性力和柯氏惯性力的影响。根据质点动力学理论，相对发射坐标系的被动段运动方程的矢量表达式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{g} + \dot{\boldsymbol{V}}_e + \dot{\boldsymbol{V}}_c \tag{7-1.1}$$

其投影式为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\ g_y + \dot{V}_{ey} + \dot{V}_{cy} \\ g_z + \dot{V}_{ez} + \dot{V}_{cz} \end{bmatrix} \tag{7-1.2}$$

式中

$X = C_{xdt} q_{dt} S_{mdt}$ 为弹头阻力，其方向与 V 方向相反；

C_{xdt} 为头部阻力系数；

S_{mdt} 为头部最大横截面积；

q_{dt} 为头部速度头；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$m = G_{dt}/\bar{g}_0$ 为头部质量；

$X_i(i = x, y, z)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 在发射坐标系各轴上的分量；

g_i、$\dot{V}_{ei}$、$\dot{V}_{ci}(i = x, y, z)$ 的物理意义和计算方法与主动段的相同。

由发射坐标系与速度坐标系间的方向余弦矩阵可得 $\boldsymbol{X}$ 在发射坐标系各轴上的分量

$$\begin{cases} X_x = -C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\cos\theta\cos\sigma \\ X_y = -C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\sin\theta\cos\sigma \\ X_z = C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\sin\sigma \end{cases} \tag{7-1.3}$$

当 σ 很小时

$$\begin{cases} X_x = -C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\cos\theta \\ X_y = -C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\sin\theta \\ X_z = C_{xdt}q_{dt}S_{mdt}\sin\sigma \end{cases} \tag{7-1.4}$$

而由图 6-5 或式(6-2.25)可得

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \approx \dfrac{V_y}{V} \\ \cos\theta = \dfrac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \approx \dfrac{V_x}{V} \\ \sin\sigma = -\dfrac{V_z}{V} \end{cases} \tag{7-1.5}$$

因此，被动段动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}C_{xdt}\rho S_{mdt}V\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\ g_y + \dot{V}_{ey} + \dot{V}_{cy} \\ g_z + \dot{V}_{ez} + \dot{V}_{cz} \end{bmatrix} \tag{7-1.6}$$

运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{7-1.7}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{7-1.8}$$

由(7-1.6)式～(7-1.8)式组成的方程组即为相对发射坐标系的被动段弹道方程组。被动段弹道方程组仍为非线性变系数常微分方程组，在给定的初始条件和终端条件下，应用数值积分方法可求出其数值解，从而获得被动段运动参数的数值及其运动规律。

§7.2 导弹为刚体时的运动微分方程

在被动段中的自由段，弹头总是依头体分离时所具有的质心速度和转动角速度翻滚着飞行的。即便是重返大气层后的飞行，尽管弹头是静稳定的，但其纵轴也并非一定与速度轴重合。飞行试验表明，弹头再入大气层时，冲角有时可达几十度，这样就不能不考虑再

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

入冲角对弹头再入飞行的影响。

若考虑再入冲角和再入转动时，作用在弹上的力除上述已讨论过的外，还作用有气动升力和气动稳定力矩及其阻尼力矩。

7.2.1 空气动力和空气动力矩

1. 空气动力及其在发射坐标系上的投影

弹头在被动段飞行时所受的空气动力 $\boldsymbol{R}$ 在总攻角坐标系轴上的分量可表成

$$\begin{cases} X_1 = A = C_{x_1 dt} q_{dt} S_{mdt} \\ Y_N = N = C_{ndt} q_{dt} S_{mdt} \\ C_{x_1 dt} = C_{xf} + C_{xd} + C_{xw} \end{cases} \tag{7-2.1}$$

式中

X_1 为头部总气动轴向力，它与 x_1 轴方向相反；

Y_N 为头部总气动法向力，位于 x_1 轴与速度矢 $\boldsymbol{V}$ 所决定的 $o_c x_c x_1$ 平面内，而且垂直于 $o_c x_1$ 轴，指向上为正(图 7-1)；

C_{ndt}、$C_{x_1 dt}$ 分别为头部总法向力系数和总轴向力系数；

C_{xw}、C_{xf}、C_{xd} 分别为头部波阻力系数，摩擦阻力系数和底部阻力系数。

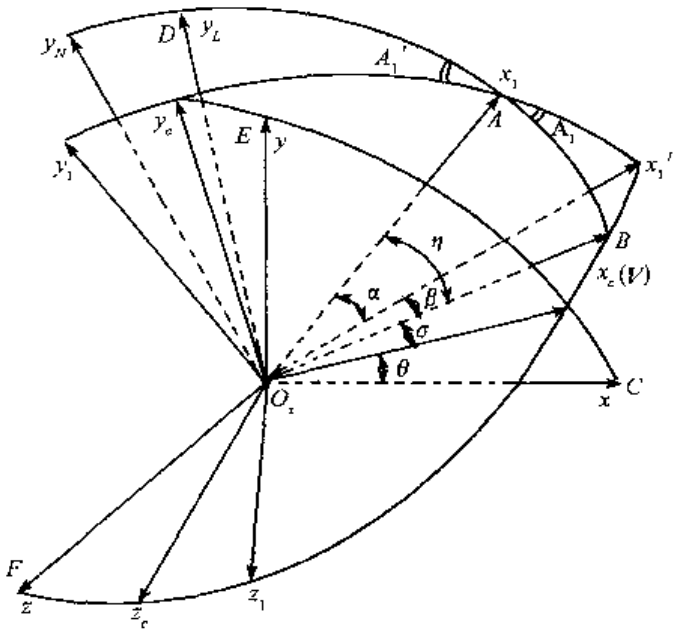


图 7-1

为便于描述头部气动力，常采用总冲角的概念。所谓总冲角是指弹头速度矢 $\boldsymbol{V}$ 与弹体纵轴 $o_c x_1$ 间的夹角，用 η 表示。当 $\boldsymbol{V}$ 在 $o_c x_1$ 轴下方时，η 为正；反之为负(图 7-1)。

总冲角 η 与冲角 α 及侧滑角 β 间的几何关系式，可应用球面三角中的余弦定理或立体几何学中的三垂线定理直接导出，即(5-2.11)式

$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\beta \tag{7-2.2}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为应用方便，在 $o_z x_c x_1$ 平面内作与 x_c 轴垂直的 y_L 轴，且将 Y_N、X_1 分别沿 x_c、y_L 轴进行分解，得升力和阻力

$$\begin{cases} X_L = Y_N\cos\eta - X_1\sin\eta \\ X = Y_N\sin\eta + X_1\cos\eta \end{cases}$$

由于

$$\begin{cases} Y_L = C_{ydt}q_{dt}S_{mdt} \\ X = C_{xdt}q_{dt}S_{mdt} \end{cases} \tag{7-2.3}$$

故

$$\begin{cases} C_{ydt} = C_{ndt}\cos\eta - C_{x_1dt}\sin\eta \\ C_{xdt} = C_{ndt}\sin\eta + C_{x_1dt}\cos\eta \end{cases} \tag{7-2.4}$$

式中 C_{ydt}、C_{xdt} 分别称为弹头升力系数和阻力系数。

应用发射坐标系与速度坐标系间的方向余弦矩阵式(2-4.1)，可得阻力 $\boldsymbol{X}$ 在发射坐标系各轴上的分量

$$\begin{cases} X_x = -X\cos\theta\cos\sigma \\ Y_x = -X\sin\theta\cos\sigma \\ Z_x = X\sin\sigma \end{cases} \tag{7-2.5}$$

而升力 Y_L 在发射坐标系各轴上的分量则可表示为

$$\begin{cases} X_y = Y_L\cos(y_L, x) \\ Y_y = Y_L\cos(y_L, y) \\ Z_y = Y_L\cos(y_L, z) \end{cases} \tag{7-2.6}$$

下面分别求 $\cos(y_L, i)(i = x, y, z)$。

在球面三角形 ABC 中(图 7-1)，应用球面三角形边角余弦定理可得

$$\cos(x_1, x) = \cos(x_1, x_c)\cos(x_c, x) + \sin(x_1, x_c)\sin(x_c, x)\cos(ABC)$$

由于

$$\begin{cases} \cos(x_1, x_c) = \cos\eta \\ \sin(x_1, x_c) = \sin\eta \\ \cos(x_1, x) = \cos\varphi\cos\psi \\ \cos(x_c, x) = \cos\theta\cos\sigma \end{cases}$$

故

$$\cos\varphi\cos\psi = \cos\eta\cos\theta\cos\sigma + \sin\eta\sin(x_c, x)\cos(ABC)$$

即

$$\sin(x_c, x)\cos(ABC) = \frac{1}{\sin\eta}(\cos\varphi\cos\psi - \cos\eta\cos\theta\cos\sigma) \tag{7-2.7}$$

在球面三角形 BCD 中，因角 $\angle y_L o_z x_c = \frac{\pi}{2}$，故应用球面三角形边角余弦定理，可得

$$\cos(y_L, x) = \sin(x_c, x)\cos(DBC)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将(7－2.7)式代入上式

$$\cos(y_L, x) = \frac{1}{\sin\eta}(\cos\varphi\cos\psi - \cos\eta\cos\theta\cos\sigma) \tag{7-2.8}$$

在球面三角形 ABE 中(图 7－1),因

$$\begin{cases} \cos(x_1, x_c) = \cos\eta \\ \sin(x_1, x_c) = \sin\eta \\ \cos(y, x_1) = \cos\psi\sin\varphi \\ \cos(y, x_c) = \cos\sigma\sin\theta \end{cases}$$

仍用球面三角形边角余弦定理,可得

$$\sin(y, x_c)\cos(ABE) = \frac{1}{\sin\eta}(\cos\psi\sin\varphi - \cos\eta\sin\theta\cos\sigma) \tag{7-2.9}$$

在球面三角形 DBE 中(图 7－1),由于角 $\angle y_L o_c x_c = \frac{\pi}{2}$,故

$$\cos(y_L, y) = \sin(y, x_c)\cos(ABE)$$

将(7－2.9)式代入上式,则有

$$\cos(y_L, y) = \frac{1}{\sin\eta}(\cos\psi\sin\varphi - \cos\eta\sin\theta\cos\sigma) \tag{7-2.10}$$

类似上述方法,同样有

$$\cos(y_L, z) = \frac{1}{\sin\eta}(\cos\eta\sin\sigma - \sin\psi) \tag{7-2.11}$$

将(7－2.8)式、(7－2.10)式及(7－2.11)式分别代入(7－2.6)式,且考虑(7－2.5)式,则 X 及 Y_L 在发射坐标系各轴上的投影代数和为

$$\begin{cases} R_x = -X\cos\theta\cos\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\cos\varphi\cos\psi - \cos\eta\cos\theta\cos\sigma) \\ R_y = -X\sin\theta\cos\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\sin\varphi\cos\psi - \cos\eta\sin\theta\cos\sigma) \\ R_z = X\sin\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\cos\eta\sin\sigma - \sin\psi) \end{cases} \tag{7-2.12}$$

2. 空气动力矩

空气动力矩包括气动稳定力矩和气动阻尼力矩。

(1) 稳定力矩

空气动力沿总攻角坐标系 x_1 轴和 y_N 轴上的分量称为总轴向力和总法向力。由于压力中心位于弹体纵对称轴上,因此总轴向力和总法向力对 x_1 轴均不产生气动稳定力矩,而总法向力 Y_N 对 y_1 和 z_1 轴产生的气动稳定力矩为

$$\begin{cases} M_{y_1 f} = Y_N\cos(y_N, z_1)(x_{cp} - x_{cg}) \\ M_{z_1 f} = -Y_N\cos(y_N, y_1)(x_{cp} - x_{cg}) \end{cases} \tag{7-2.13}$$

式中

x_{cp} 为头部压力中心至其理论尖端的距离;

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

x_{zg} 为头部重心至其理论尖端的距离。

在球面三角形 ABx'_1 中，因角 $Ax'_1B = \frac{\pi}{2}$，故由球面三角形正弦定理和边的余弦定理可得

$$\begin{cases} \cos A_1 = \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} \\ \sin A_1 = \dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \end{cases}$$

同理，在球面三角形 Ay_Ny_1 中，可得

$$\begin{cases} \cos(y_N, y_1) = \cos A'_1 \\ \sin(y_N, y_1) = \sin A'_1 \end{cases}$$

由于 $A = A'$ 和 $\cos(y_N, z_1) = -\sin(y_N, y_1)$，于是

$$\begin{cases} \cos(y_N, y_1) = \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} \\ \cos(y_N, z_1) = -\dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \end{cases} \tag{7-2.14}$$

将其代入(7-2.13)式，且顾及

$$\begin{cases} Y_N = C_{ndt} q_{dt} S_{mdt} \\ \bar{x}_{cp} = \dfrac{x_{cp}}{l_k} \\ \bar{x}_{cg} = \dfrac{\bar{x}_{cg}}{l_k} \end{cases} \tag{7-2.15}$$

因此

$$\begin{cases} M_{y_1 t} = -C_{ndt} q_{dt} S_{mdt} l_k (\bar{x}_{cp} - \bar{x}_{cg}) \dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \\ M_{z_1 t} = -C_{ndt} q_{dt} S_{mdt} l_k (\bar{x}_{cp} - \bar{x}_{cg}) \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} \end{cases}$$

当令

$$C_{mdt} = C_{ndt}(\bar{x}_{cp} - \bar{x}_{cg}) \tag{7-2.16}$$

时，则上式又可写成

$$\begin{cases} M_{y_1 t} = -C_{mdt} q_{dt} S_{mdt} l_k \dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} \\ M_{z_1 t} = -C_{mdt} q_{dt} S_{mdt} l_k \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} \end{cases} \tag{7-2.17}$$

式中，$\bar{x}_{cg}$ 为弹头质心系数；为 $\bar{x}_{cp}$ 压力中心系数；l_k 为弹头长度，C_{mdt} 为弹头气动稳定力矩系数。

(2) 阻尼力矩

根据气动阻尼力矩定义及其阻尼力矩式(5-3.7)和(5-3.8)式，则弹头气动阻尼力矩可直接表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} M_{y_1 d} = C_{md} q_{dt} S_{mdt} l_k^2 \dfrac{\omega_{y_1 d}}{V} \\ M_{z_1 d} = C_{md} q_{dt} S_{mdt} l_k^2 \dfrac{\omega_{z_1 d}}{V} \end{cases} \tag{7-2.18}$$

式中，V 为弹头速度；$\omega_{z_1 d}$ 及 $\omega_{y_1 d}$ 为弹头绕弹体轴 z_1 及 y_1 的转动角速度；C_{md} 为气动阻尼力矩系数。

7.2.2 弹头质心运动方程

根据刚体动力学基本定理，可直接写出弹头为刚体时相对发射坐标系的动力学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cy} \\ g_y + \dot{V}_{cy} + \dot{V}_{cy} \\ g_z + \dot{V}_{ez} + \dot{V}_{cz} \end{bmatrix}$$

将(7－2.12)式代入上式，则有

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \dfrac{1}{m}\left[-X\cos\theta\cos\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\cos\varphi\cos\psi - \cos\eta\cos\theta\cos\sigma) \right] + g_x + \dot{V}_{ex} + \dot{V}_{cx} \\ \dot{V}_y = \dfrac{1}{m}\left[-X\sin\theta\cos\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\sin\varphi\cos\psi - \cos\eta\sin\theta\cos\sigma) \right] + g_y + \dot{V}_{cy} + \dot{V}_{cy} \\ \dot{V}_z = \dfrac{1}{m}\left[X\sin\sigma + \dfrac{Y_L}{\sin\eta}(\cos\eta\sin\sigma - \sin\psi) \right] + g_z + \dot{V}_{cz} + \dot{V}_{cz} \end{cases} \tag{7-2.19}$$

运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{7-2.20}$$

7.2.3 绕质心运动方程

根据(6－2.16)式，弹头绕质心转动的动力学方程为

$$\begin{cases} I_{x_1 dt} \dfrac{d\omega_{x_1 dt}}{dt} = (I_{y_1 dt} - I_{z_1 dt})\omega_{y_1 dt}\omega_{z_1 dt} + \sum M_{x_1 dt} \\ I_{y_1 dt} \dfrac{d\omega_{y_1 dt}}{dt} = (I_{z_1 dt} - I_{x_1 dt})\omega_{z_1 dt}\omega_{x_1 dt} + \sum M_{y_1 dt} \\ I_{z_1 dt} \dfrac{d\omega_{z_1 dt}}{dt} = (I_{x_1 dt} - I_{y_1 dt})\omega_{x_1 dt}\omega_{y_1 dt} + \sum M_{z_1 dt} \end{cases}$$

式中

$I_{x_1 dt}$、$I_{y_1 dt}$、$I_{z_1 dt}$ 为弹头转动惯量；

$\sum M_{x_1 dt}$、$\sum M_{y_1 dt}$、$\sum M_{z_1 dt}$ 分别为合力矩矢在弹体坐标系各轴上的分量。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将(7 - 2.17)及(7 - 2.18)代入上式,并顾及$\sum M_{x_1 dt} = 0$时,则有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{z_1 dt} = \dfrac{I_{y_1 dt} - I_{z_1 dt}}{I_{z_1 dt}} \omega_{z_1 dt} \omega_{y_1 dt} \\ \dot{\omega}_{y_1 dt} = \dfrac{I_{z_1 dt} - I_{x_1 dt}}{I_{y_1 dt}} \omega_{x_1 dt} \omega_{z_1 dt} - \dfrac{C_{mdt} q_{dt} S_{mdt} l_k}{I_{y_1 dt}} \dfrac{\sin\beta}{\sin\eta} + \dfrac{C_{md} q_{dt} S_{mdt} l_k^2}{I_{y_1 dt}} \dfrac{\omega_{y_1 dt}}{V} \\ \dot{\omega}_{z_1 dt} = \dfrac{I_{x_1 dt} - I_{y_1 dt}}{I_{z_1 dt}} \omega_{x_1 dt} \omega_{y_1 dt} - \dfrac{C_{mdt} q_{dt} S_{mdt} l_k}{I_{z_1 dt}} \dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin\eta} + \dfrac{C_{md} q_{dt} S_{mdt} l_k^2}{I_{y_1 dt}} \dfrac{\omega_{z_1 dt}}{V} \end{cases} \tag{7 - 2.21}$$

弹头绕质心转动的运动学方程由式

$$\begin{cases} \omega_{x_1 dt} = -\dot{\varphi}\sin\psi + \dot{\gamma} \\ \omega_{y_1 dt} = \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma + \dot{\psi}\cos\gamma \\ \omega_{z_1 dt} = \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma - \dot{\psi}\sin\gamma \end{cases}$$

经变换可得

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{1}{\cos\psi}(\omega_{y_1 dt}\sin\gamma + \omega_{z_1 dt}\cos\gamma) \\ \dot{\psi} = \omega_{y_1 dt}\cos\gamma - \omega_{x_1 dt}\sin\gamma \\ \dot{\gamma} = \omega_{x_1 dt} + \mathrm{tg}\psi(\omega_{y_1 dt}\sin\gamma + \omega_{z_1 dt}\cos\gamma) \end{cases} \tag{7 - 2.22}$$

7.2.4 联系方程

类似于(6 - 2.21)式的推导方法,首先依据发射坐标系分别与弹体坐标系和速度坐标系间的关系,导出弹体坐标系与速度坐标系间的坐标关系式

$$[x_1] = \boldsymbol{B}[x_c] \tag{7 - 2.23}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \tag{7 - 2.24}$$

各矩阵元素

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} B_{11} = \cos\psi\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\psi\sin\sigma \\ B_{12} = \cos\psi\sin(\varphi-\theta) \\ B_{13} = \cos\psi\sin\sigma\cos(\varphi-\theta) - \sin\psi\cos\sigma \\ B_{21} = \sin\psi\cos\sigma\sin\gamma\cos(\varphi-\theta) - \cos\gamma\cos\sigma\sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\sin\gamma\sin\sigma \\ B_{22} = \sin\psi\sin\gamma\sin(\varphi-\theta) + \cos\gamma\cos(\varphi-\theta) \\ B_{23} = \sin\psi\sin\gamma\sin\sigma\cos(\varphi-\theta) - \cos\gamma\sin\sigma\sin(\varphi-\theta) + \cos\psi\sin\gamma\cos\sigma \\ B_{31} = \sin\psi\cos\sigma\cos\gamma\cos(\varphi-\theta) + \cos\sigma\sin\gamma\sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\cos\gamma\sin\sigma \\ B_{32} = \sin\psi\cos\gamma\sin(\varphi-\theta) - \sin\gamma\cos(\varphi-\theta) \\ B_{31} = \sin\psi\sin\sigma\cos\gamma\cos(\varphi-\theta) + \sin\sigma\sin\gamma\sin(\varphi-\theta) + \cos\psi\cos\gamma\cos\sigma \end{cases} \tag{7-2.25}$$

然后将矩阵元素与 § 2.4 中已讨论过的弹体坐标系与速度坐标系间的坐标变换式(2-4.4)中的对应矩阵元素进行比较,便可得欧拉角间的联系方程

$$\cos\alpha\cos\beta = B_{11} = \cos\psi\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\psi\sin\sigma$$

由于

$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\beta$$

于是

$$\begin{cases} \cos\eta = \cos\psi\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \sin\psi\sin\sigma \\ \cos\alpha = \dfrac{\cos\eta}{\cos\beta} \end{cases} \tag{7-2.26}$$

同理

$$\begin{cases} \sin\beta = B_{31} = \sin\psi\cos\gamma\cos\sigma\cos(\varphi-\theta) + \cos\sigma\sin\gamma\sin(\varphi-\theta) - \cos\psi\cos\gamma\sin\sigma \\ \sin\alpha = -B_{21}/\cos\beta \\ \qquad = [-\sin\psi\cos\sigma\sin\gamma\cos(\varphi-\theta) + \cos\gamma\cos\sigma\sin(\varphi-\theta) + \cos\psi\sin\gamma\sin\sigma]/\cos\beta \end{cases} \tag{7-2.27}$$

式中

$$\begin{cases} \theta = \begin{cases} \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} & V_x \geqslant 0 \\ -\left(\pi + \sin^{-1}\dfrac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}\right) & V_x < 0 \end{cases} \\ \sigma = -\sin^{-1}\dfrac{V_z}{V} \end{cases} \tag{7-2.28}$$

综合上述方程和与此有关联的主动段运动方程,便得弹头为转动刚体时的被动段运动微分方程组(略)。由此看出,上述方程组仍为非线性变系数常微分方程组,当初始条件和终端条件已知时,应用数值积分方法即可求解出被动段各运动参数。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§7.3 被动段弹道特性分析

7.3.1 有气动阻力时的被动段弹道特性

事实上，自由段弹道并非处于绝对真空状态，而只是空气密度非常稀薄罢了，因此，导弹在自由段飞行时仍会程度不同地受到空气阻力作用。射程越小，弹道高度也就越低，阻力对其飞行的影响也就越趋于明显，因而有气动阻力时的自由段弹道特性与理想真空条件下的椭圆弹道特性就有所区别。其区别具体表现在以下几方面：

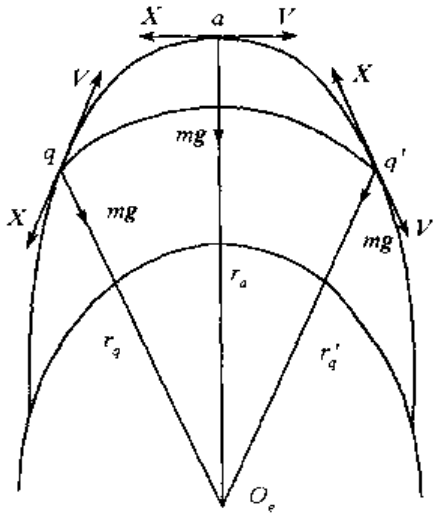


图 7－2

1. 弹道对应点上的飞行速度大小不等

对于椭圆弹道，以后将会看到，其升弧段（头体分离点至弹道最高点间的弹道称为升弧段弹道）和降弧段（弹道最高点至落地点间的弹道称为降弧段弹道）上具有相同地心距 r 的对应点之速度值是相等的。但对于计及气动阻力时的被动段弹道上任两个对应点 q 和 q'（图 7－2）而言，导弹由 q 至 q' 的动能改变量等于作用其上的外力 F 所做的功，即有

$$\frac{1}{2}mV_{q'}^2 - \frac{1}{2}mV_q^2 = \int_q^{q'} F\mathrm{d}s \tag{7-3.1}$$

其中外力 F 含有引力和空气阻力。由于 q、q' 两点具有相同的地心距，故引力所做的功等于零，而空气阻力在导弹运动中则是做了负功，由(7－3.1)式可知

$$V_q > V_{q'}$$

这充分说明，考虑空气阻力时的被动段弹道对应点之速度是不等的，即

$$V_{升}(r) > V_{降}(r) \tag{7-3.2}$$

且当空气阻力作用越大时，则两相应点的速度差也越大。

2. 弹道的降弧段比升弧段陡

由(11－2.1)第二式和第三式可得

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{V^2}\right)\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}$$

即

$$\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}\mathrm{d}\Theta = \frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{g}{V^2}\mathrm{d}r$$

上式不难写成

$$\mathrm{d}(\ln\cos\Theta) = \frac{g}{V^2}\mathrm{d}r - \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

在弹道上任取两对应点 q 和 q'，并由 q 和 q' 积分，得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\int_q^{q'} \mathrm{d}(\ln\cos\Theta) = \int_{r_q}^{r_{q'}} \frac{g}{V^2}\mathrm{d}r - \int_{r_q}^{r_{q'}} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

为便于讨论，将上述积分分成两段进行：一段从 q 至弹道顶点 a，另一段由 a 至 q'，于是

$$\int_q^a \mathrm{d}(\ln\cos\Theta) = \int_{r_q}^{r_a} \frac{g}{V_{升}^2(r)}\mathrm{d}r - \int_{r_q}^{r_a} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\int_a^{q'} \mathrm{d}(\ln\cos\Theta) = \int_{r_a}^{r_{q'}} \frac{g}{V_{降}^2(r)}\mathrm{d}r - \int_{r_a}^{r_{q'}} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

在弹道顶点处，由于 $\Theta = 0$，故上式可写成

$$-\ln\cos\Theta_q = \int_{r_q}^{r_a} \frac{g}{V_{升}^2(r)}\mathrm{d}r - \ln\frac{r_a}{r_q}$$

$$\ln\cos\Theta_{q'} = \int_{r_a}^{r_{q'}} \frac{g}{V_{降}^2(r)}\mathrm{d}r - \ln\frac{r_{q'}}{r_a}$$

又因 q、q' 两点的地心距相等，所以

$$\ln\cos\Theta_q = -\int_{r_q}^{r_a} \frac{g}{V_{升}^2(r)}\mathrm{d}r + \ln\frac{r_a}{r_q}$$

$$\ln\cos\Theta_{q'} = -\int_{r_q}^{r_a} \frac{g}{V_{降}^2(r)}\mathrm{d}r + \ln\frac{r_a}{r_q}$$

当顾及前面已证明的结果，$V_{升}(r) > V_{降}(r)$ 时，则

$$\ln\cos\Theta_q > \ln\cos\Theta_{q'} \tag{7-3.3}$$

由此得

$$|\Theta_{q'}| > |\Theta_q|$$

上述讨论，完全可推广到整个被动段弹道，于是有

$$|\Theta_{降}(r)| > |\Theta_{升}(r)| \tag{7-3.4}$$

显然，处于大气中的被动段弹道，其降弧段比升弧段要陡。

3. 对应速度最小值的点与弹道顶点不重合

椭圆弹道的弹道顶点为远地点，此点速度最小。但对有空气阻力时的被动段弹道而言，其速度取最小值时应满足

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$$

根据(11-2.1)第一式可知，当 V 值最小时

$$\frac{X}{m} + g\sin\Theta = 0 \tag{7-3.5}$$

由此可知，欲使速度达到最小值，必须满足引力 mg 在弹道的切向分量 $mg\sin\Theta$ 与空气阻力 X 的大小相等，而方向相反。在升弧段上，由于阻力的方向与引力在弹道切线方向上的分量是一致的，因而 $\dot{V}$ 始终不能为零。在弹道顶点处，却又因引力与阻力垂直而不能互相抵消，所以 $\dot{V}$ 也不等于零。而在降弧段上，因两者的方向相反，而且总是存在着会使 $\dot{V} = 0$ 的点，因此对应速度最小值的点与弹道顶点不重合，且发生在降弧段上。

4. 被动段射程与导弹的质量大小有关

将由椭圆弹道理论可知，导弹被动段射程完全取决于主动段终点运动参数 V_k、r_k、

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

Θ_k，而与导弹质量无关。但当导弹被动段考虑气动阻力影响时，则由(7－3.1)式

$$V_q^2 - V_{q'}^2 = \frac{2}{m}\int_q^{q'} X\mathrm{d}s$$

可见，在弹道上任意两对应点速度平方差不仅与作用在导弹上的空气阻力大小有关，而且与导弹的质量 m 也有关。这是由于在相同的 V_q 条件下，质量大的导弹所具有的动能也大，空气阻力所造成的速度损失比较小，因而射程就较大。所以，导弹在大气中飞行时，其被动段射程不仅与主动段终点参数 V_k、r_k、Θ_k 有关，而且还与被动段飞行时导弹的质量 m 大小有关。

7.3.2 主要弹道参数特性分析

在初始条件下，对在第一节中导出的被动段运动微分方程组进行数值积分，即可得考虑空气阻力时的被动段弹道参数随时间变化的规律。被动段的主要运动参数是加速度 $\dot{V}(t)$、速度 $V(t)$ 及空气阻力 X。根据数值积分计算结果所描绘出的弹道导弹被动段运动参数 $\dot{V}$、V 及空气阻力 X 随时间变化的曲线如图 7－3 所示。

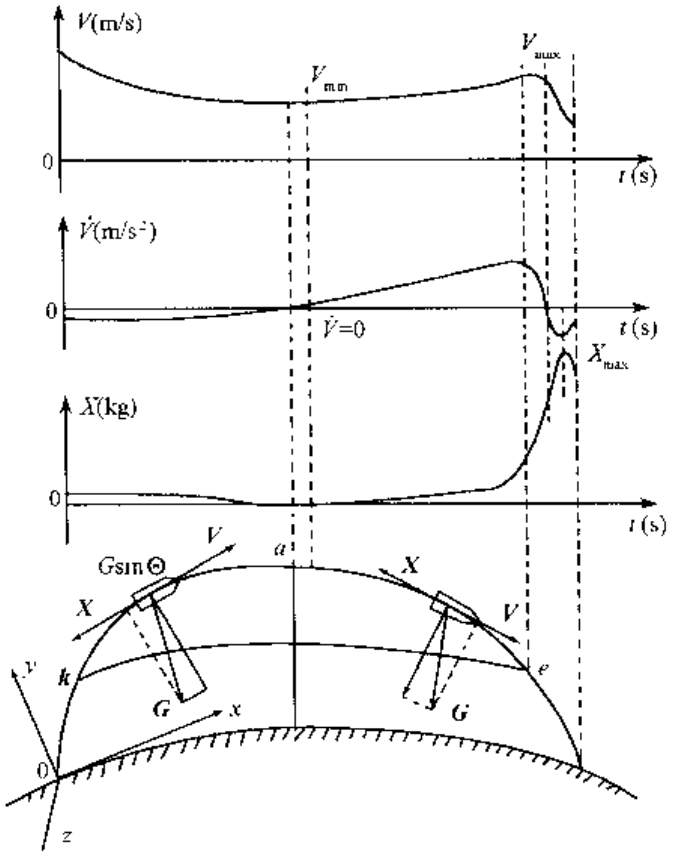


图 7－3

导弹加速度 $\dot{V}$ 的大小取决于作用在它上面的力，而导弹被动段运动时只受地球引力和空气阻力作用。由图 7－3 清楚地看出，空气阻力方向始终与导弹速度 V 的方向相反，起着阻止导弹运动的作用。而地球引力，在头体分离点至弹道最高点间的升弧段上，其切向

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

分量 $mg\sin\Theta$ 的方向与空气阻力方向一致(即与速度 V 方向相反),因而起着阻止导弹作加速度运动的作用;但在弹道最高点至落地点间的降弧段上,因其切向分量与速度方向相同,因而起着加速导弹运动的作用。

明确了作用力的变化情况后,我们就不难分析被动段切向加速度 $\dot{V}(t)$ 和速度 $V(t)$ 的变化规律了。在被动段的升弧段,由于空气阻力和地球引力的切向分量与速度方向相反,所以切向加速度 $\dot{V}$ 为负值。又因为速度不断减小,而飞行高度又不断增加,空气密度越来越稀薄,因而阻力不断下降。另外,由于速度倾角 Θ 也不断减小,使得引力的切向分量在减小,总的结果使得 $\dot{V}$ 的绝对值不断减小。在弹道顶点,由于空气阻力 X 垂直于地球引力 G,且不等于零,故切向加速度 $\dot{V}$ 也不等于零(即不为最小值)。当导弹飞行至过顶点后的降弧段,地球引力的切向分量与速度方向相同,而与阻力 X 方向相反。开始时由于阻力 X 很小,故导弹沿降弧段飞行一小段时就会使引力的切向分量与阻力平衡,出现 $\dot{V}=0$,即速度取最小值 V_{min}。以后由于引力的作用较阻力大,V 则变为正值,并逐渐增大,V 也相应地增大。随着导弹飞行高度的降低,空气密度逐渐增大,空气阻力也在增大,因而促使 $\dot{V}$ 减小。当空气阻力与地球引力的切向分量再次相等时,则 $\dot{V}$ 又为零,此时的速度达最大值 V_{max}。随着飞行高度的急剧下降和空气密度的急骤增加,空气阻力也相应地增加很快,因而加速度 $|\dot{V}|$ 增大和速度 V 迅速减小。当空气阻力达最大值时,则 $\dot{V}$ 为最小值 $\dot{V}_{min}$。以后因 V 的减小,阻力也减小,同时也因速度倾角 Θ 的绝对值增大,引力的切向分量增大,故加速度 $\dot{V}$ 又有所回升,但仍为负值。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第八章　弹道计算

在建立了描述导弹运动规律的弹道方程组之后，为深入理解弹道特性，应在对运动参数进行定性分析的基础上，进一步作一些定量研究，这就需要对在一定条件下建立起来的弹道方程组进行解算，以寻找各弹道参数的数值变化规律以及弹道特性与各参数之间的数量变化关系。下面就弹道解算有关问题简要地作些讨论。

§8.1　标准弹道和干扰弹道

在弹道学中，常把弹道分为“初步弹道”和“精确弹道”两种。初步弹道是指略去影响导弹运动的一些次要因素后解算出的导弹质心运动轨迹，它反映了导弹运动的基本规律和弹道特性，因而是导弹初步设计的重要依据。精确弹道是指考虑众多影响因素时解算出的导弹质心运动轨迹，它比较准确地反映了导弹实际飞行状态和各参数间的相互关系，因此是导弹定型及作战使用的依据。精确弹道常又分为标准弹道和干扰弹道（或称实际弹道）。下面分别进行讨论。

8.1.1　标准条件和标准弹道

标准弹道是指在给定的初始条件下，求解相对标准条件建立起来的标准弹道方程组所获得的导弹质心运动轨迹。所谓标准条件，则是指人们根据所研究问题的内容和性质不同，而预先假定的一组保证实际弹道与标准弹道偏差尽可能小的已知条件。

1. 标准条件

尽管由于导弹类型的不同，标准条件不尽相同，但大体上标准条件均包含如下几个方面：

(1) 地球物理条件

地球形状；地球自转角速度；地球扁率；地面重力加速度；重量和质量换算常数；发射点和目标点高程以及经度、纬度和瞄准方位角等等。

(2) 气象条件

标准大气；地面标准温度、标准大气压力、标准大气密度和标准音速以及各高度上的标准风速；等等。

(3) 导弹诸元条件

几何尺寸；重量；飞行程序角；发动机的推力、比推力、推进剂秒流量和比重以及发动机安装角；空气动力系数；压力中心和重心位置；控制系统的放大系数；等等。

2. 标准弹道方程组

在给定的标准条件下而建立的描述导弹质心运动规律的弹道方程组称为标准弹道方

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

程组。

8.1.2 干扰和干扰弹道

前已叙及，标准弹道是通过求解在标准条件下建立起来的标准弹道方程组得到的，它反映了导弹质心“平均运动”的规律。事实上，影响导弹运动的因素很多，而且这些影响因素的实际值，有些并非预先能够确定，有的即使预先能够知其大小，但也往往与假定的标准值不一致，即两者存在着一定差异。习惯上，我们就把这种实际飞行条件与标准飞行条件的差异称为干扰。正是由于这些干扰的影响，导致了实际运动弹道偏离标准弹道，即存在弹道参数偏差和射程偏差。

通常，干扰分为两大类：一类是在导弹射击前可以预测的、且又能进行修正的干扰，这类干扰称为常值干扰或系统干扰，它所引起的弹道参数偏差和射程偏差称为系统偏差；另一类干扰则是事先不可预测的（如阵风等）干扰，这类干扰称为随机干扰或偶然干扰。由于这类干扰事先无法确定，因而也就无法在发射前预先进行修正而只有在发射后依靠弹上控制系统适时测量而加以补偿。

需要着重指出的是，与标准弹道相对应的标准条件应依据研究问题的内容和性质的不同而有所不同。例如，对近程导弹而言，由于射程近和飞行时间不长，常把地球视为不自转的圆球体作为标准的地球物理条件。而对中远程导弹而言，通常是把地球视为旋转着的正常椭球体作为标准地球物理条件的。对于前者，地球扁率和自转即为地球物理条件的干扰，而对后者，则认为是标准地球物理条件。另外，常值干扰和随机干扰也不是绝对的，即使是同一种干扰，对于某一型号导弹它可能是常值干扰，而对于另一型号导弹，它又可能是随机干扰。

再则，这里述及的干扰与导弹实际飞行中作用在它上面的干扰也不相同，它既包含了事先无法预知的一些量，同时也包含了实际发射条件与标准条件的偏差。

1. 干扰条件

导弹的实际条件与标准条件的偏差称为干扰。弹道导弹的常值干扰条件一般为：

(1) 弹体纵横向弹形系数 i,j；

(2) 发动机推力轴线对横对称面和纵对称面的偏角 η_α、η_β；

(3) 发动机安装轴线对横对称面和纵对称面的线性偏差 ε_α、ε_β；

(4) 弹体相对横对称面和纵对称面的偏角 $\Delta\alpha_0$、$\Delta\beta_0$；

(5) 飞行程序角偏差 $\Delta\varphi_{\alpha x}$、$\Delta\psi_{\alpha x}$；

(6) 推进剂秒流量偏差 $\Delta\dot{G}$（或 $\Delta\dot{G}_y$、$\Delta\dot{G}_R$）；

(7) 推力偏差 ΔP；

(8) 起飞重量偏差 ΔG_0；

(9) 重心在纵、横对称面内的偏移量 ΔZ_α、ΔZ_β；

(10) 地面大气压力和大气密度偏差 Δp_0、$\Delta\rho_0$；

(11) 风的影响。

2. 干扰弹道方程组

将上述干扰量加入标准弹道方程组相对应的项上，便得干扰弹道微分方程组。在实际

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

条件下，求解与之相应的干扰弹道方程组所得的弹道，称为干扰弹道或实际弹道。

(1) 风的影响

导弹在大气层中飞行时，风的影响是显而易见的。由空气动力学得知，风的存在直接影响到飞行冲角 α 和侧滑角 β。设 α 及 α' 分别为导弹相对地面的速度 $\boldsymbol{V}$ 和相对风的速度 $\boldsymbol{V}'$ 与弹体轴形成的冲角，$\boldsymbol{W}_{fx}$ 及 $\boldsymbol{W}_{fz}$ 分别为沿 x 轴和 z 轴方向的纵向风速和横向风速(图 8 - 1)，那么由 $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{V}'$ 及 $\boldsymbol{W}_{fx}$ 组成的矢量关系式为

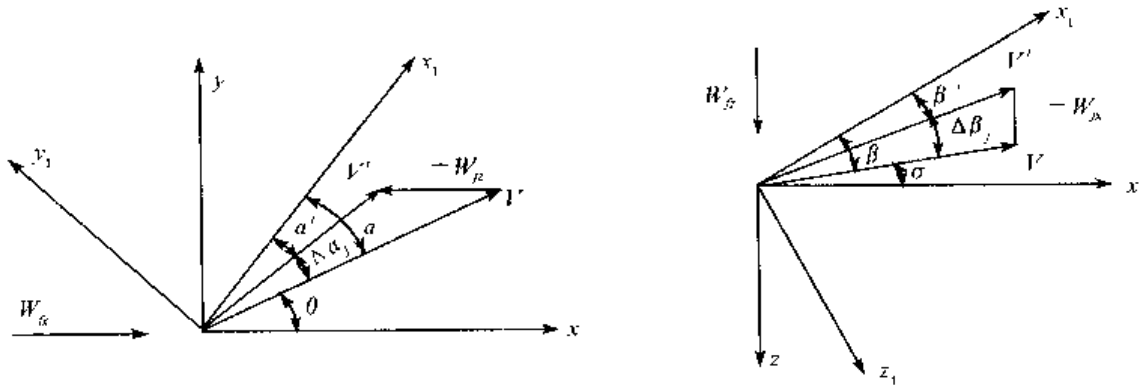


图 8 - 1

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{W}_{fx}$$

即

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}_{fx} \tag{8-1.1}$$

上式在速度坐标系 o_2x_c 及 o_2y_c 轴上的投影式为

$$\begin{cases} V'\cos\Delta\alpha_f = V - W_{fx}\cos\theta \\ V'\sin\Delta\alpha_f = -W_{fx}\sin\theta \end{cases} \tag{8-1.2}$$

因此

$$\begin{aligned} V' &= \sqrt{(V - W_{fx}\cos\theta)^2 + (-W_{fx}\sin\theta)^2} \\ &= V - W_{fx}\cos\theta \end{aligned} \tag{8-1.3}$$

上式表明，当 $W_{fx} > 0$(顺风) 时，导弹相对风的速度 V' 小于相对地面的速度 V。

由(8 - 1.2) 式可得冲角增量 $\Delta\alpha_f$

$$\Delta\alpha_f = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{W_{fx}\sin\theta}{V - W_{fx}\cos\theta}\right) \tag{8-1.4}$$

由此看出，$\Delta\alpha_f < 0$，因此得出结论：导弹顺风飞行时，风使冲角 α 减小；逆风飞行时，风使冲角 α 增大。

同理，侧滑角增量 $\Delta\beta_f$ 为

$$\Delta\beta_f = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{W_{fz}}{V}\right) \tag{8-1.5}$$

很显然，正的横向风使导弹侧滑角减小，而负的横向风则使侧滑角增大。

发动机推力轴线偏角 η_α、η_β 也类似于风的作用。因此，当考虑到 $\Delta\alpha_f$、$\Delta\beta_f$、η_α、η_β 以及

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

ΔG_0 的影响后，则导弹视加速度矢沿弹体坐标系各轴的分量为

$$\begin{cases} \dot{W}_{x1} = \dfrac{1}{m}[P_e - X\cos(\alpha + \Delta\alpha_f)\cos(\beta + \Delta\beta_f) + Y\sin(\alpha + \Delta\alpha_f) \\ \qquad + Z\cos(\alpha + \Delta\alpha_f)\sin(\beta + \Delta\beta_f)] \\ \dot{W}_{y1} = \dfrac{1}{m}[-P\eta_\alpha + R'\sin\delta_\varphi\cos\delta_\psi + X\sin(\alpha + \Delta\alpha_f)\cos(\beta + \Delta\beta_f) \\ \qquad + Y\cos(\alpha + \Delta\alpha_f) - Z\sin(\alpha + \Delta\alpha_f)\sin(\beta + \Delta\beta_f)] \\ \dot{W}_{z1} = \dfrac{1}{m}[P\eta_\beta - R'\sin\delta_\psi\cos\delta_\varphi - X\sin(\beta + \Delta\beta_f) - Z\cos(\beta + \Delta\beta_f)] \end{cases} \tag{8-1.6}$$

式中

$$m = m_0 + \Delta m_0 - \int_0^t \dot{m}\,dt \tag{8-1.7}$$

(2) ΔP、η_α、η_β 对推力的影响

$$Pe = \begin{cases} (P + \Delta P)\cos\mu\cos\delta_\varphi\cos\delta_\psi\cos\eta_\alpha\cos\eta_\beta & (\text{一级}) \\ (P_z + \Delta P_z)\cos\eta_\alpha\cos\eta_\beta + (R' + \dfrac{1}{2}\Delta P_u)\cos\mu(\cos\delta_\varphi + \cos\delta_\psi) & (\text{二级}) \end{cases} \tag{8-1.8}$$

(3)$\Delta\varphi_{ex}$、$\Delta\psi_{ex}$、ΔZ_α、ΔZ_β、$\Delta\alpha_f$、$\Delta\beta_f$、ε_α、ε_β 对 α、β、$\Delta\varphi$、$\bar{\psi}$ 的影响

$$\begin{cases} \alpha = A^\varphi\left[\varphi_{ex}(t) - \omega_z t_s - \theta + \Delta\varphi_{ex} - \dfrac{m'}{a_0^\varphi}\right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\Delta\alpha_f C_n^\alpha q S_m(x_y - x_z)}{a_0^\varphi R'(x_{ry} - x_z)} + \dfrac{P(\Delta Z_\alpha + \varepsilon_\alpha) + P\eta_\alpha(l_r - x_z)}{a_0^\varphi R'(x_{ry} - x_z)}\right] \\ \beta = A^\psi[(\omega_x\sin\varphi - \omega_y\cos\varphi)t_s - \sigma - \dfrac{n'}{a_0^\psi} + \Delta\psi_{ex} \\ \qquad + \dfrac{-\Delta\beta_f C_n^\alpha q S_m(x_y - x_z) + P(\varepsilon_\beta - \Delta Z_\beta) + P\eta_\beta(l_r - x_z)}{a_0^\psi R'(x_{ry} - x_z)}] \\ \Delta\varphi = \bar{\varphi} - [\varphi_{ex}(t) + \Delta\varphi_{ex}] \\ \bar{\psi} = -\sin^{-1}(a'_{31}\cos\varphi\cos\psi + a'_{32}\sin\varphi\cos\psi - a'_{33}\sin\psi) - \Delta\psi_{ex} \end{cases} \tag{8-1.9}$$

式中 l_r 为发动机推力轴线与弹体轴的交点至理论尖端的距离。

(4)$\Delta\dot{G}$、Δp_0 对推力及秒流量的影响

$$\begin{cases} P = P_0 + S_a(p_0 + \Delta p_0)(1 - \dfrac{p}{p_0}) + (\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}})(\delta\dot{G}_y + \delta\dot{G}_R) & (\text{一级}) \\ P_z = P_{z0} - S_{az}(p_0 + \Delta p_0)(\dfrac{p}{p_0}) + (\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}})_z(\delta\dot{G}_{yz} + \delta\dot{G}_{Rz}) & (\text{主级}) \\ P_u = P_{u0} - S_{au}(p_0 + \Delta p_0)(\dfrac{p}{p_0}) + (\dfrac{\partial P}{\partial \dot{G}})_u(\delta\dot{G}_{yu} + \delta\dot{G}_{Ru}) & (\text{游机}) \\ \dot{G}_R = \dot{G}_{R0} + \Delta\dot{G}_R + \delta\dot{G}_R \\ \dot{G}_y = \dot{G}_{y0} + \Delta\dot{G}_y + \delta\dot{G}_y \end{cases} \tag{8-1.10}$$

(5) $\Delta\alpha_f$、$\Delta\beta_f$、i、j、$\Delta\rho_0$ 对气动力的影响

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} X = (1+i)C_x qS_m \\ Y = (1+j)(\alpha + \Delta a_f)C_y^{\alpha} qS_m \\ Z = -(1+j)(\beta + \Delta\beta_f)C_y^{\alpha} qS_m \\ \rho = (\rho_0 + \Delta\rho_0)\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) \end{cases} \tag{8-1.11}$$

联立上述各干扰方程及标准弹道方程组中的有关方程，即可组成干扰弹道方程组（略）。在给定的初始条件下解算干扰弹道方程组，便可得到干扰情况下的运动参数及射程。

§8.2 弹道微分方程组的解算方法

无论是标准弹道方程组还是干扰弹道方程组，都是变系数非线性常微分方程组，而且许多变系数值又不是以解析式表示，而是以数表或图线的形式给出的，因此，只能用数值积分的方法求其数值解，无法求出解析解。

常微分方程组的数值积分方法很多，但在弹道计算中，根据弹道方程组的特性和对弹道计算精度的要求，经常采用龙格库塔法、阿达姆茨法以及龙格库塔转阿达姆茨法（或称预报校正法）等数值积分方法。

8.2.1 标准弹道方程组的解算方法

由于标准弹道方程组是变系数非线性常微分方程组，所以只能用数值积分方法求解。

1. *龙格库塔方法*

若给定的一阶常微分方程组的初值问题为

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_1(t_0) = y_{10} \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_2(t_0) = y_{20} \\ \cdots \\ y'_m = f_m(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_m(t_0) = y_{m0} \end{cases}$$

时，则解此初始问题的四阶龙格库塔积分法的数学计算式为

$$y_{ij+1} = y_{ij} + \frac{h}{6}(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i}) \tag{8-2.1}$$

其中

$$\begin{cases} K_{1i} = f_i(t_j, y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}, \cdots, y_{mj}) \\ K_{2i} = f_i\left(t_j + \dfrac{h}{2}, y_{1j} + \dfrac{h}{2}K_{11}, \cdots, y_{mj} + \dfrac{h}{2}K_{1m}\right) \\ K_{3i} = f_i\left(t_j + \dfrac{h}{2}, y_{1j} + \dfrac{h}{2}K_{21}, \cdots, y_{mj} + \dfrac{h}{2}K_{2m}\right) \\ K_{4i} = f_i(t_j + h, y_{1j} + hK_{31}, \cdots, y_{mj} + hK_{3m}) \end{cases} \tag{8-2.2}$$

这里 y_i 是第 i 个因变量 y_i 在第 $t_{j+1} = t_j + h$ 点处的近似值，h 为积分步长。

在实际弹道计算中，当然亦可采用六阶、八阶、十六阶或更高阶的龙格库塔积分方法。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

但经验表明，其计算精度并不比四阶龙格库塔积分方法提高多少，有时甚至出现相反的结果

2. 阿当姆茨预报校正法

若给定的一阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_1(t_0) = y_{10} \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_2(t_0) = y_{20} \\ \cdots \\ y'_m = f_m(t, y_1, y_2, \cdots, y_m), & y_m(t_0) = y_{m0} \end{cases} \tag{8-2.3}$$

则取在一个具有较好稳定区域内的公式作为预报，用阿达姆茨公式作为校正的阿当姆茨预报校正公式为

预报公式 $$\bar{y}_{i,j+1} = y_{ij} + [55f_{ij} - 59f_{i,j-1} + 37f_{i,j-2} - 9f_{i,j-3}]\, h/24 \tag{8-2.4}$$

校正公式 $$y_{i,j+1} = y_{ij} + [9f_{i,j+1} + 19f_{i,j} - 5f_{i,j-1} + f_{i,j-2}]\, h/24 \tag{8-2.5}$$

其中

$$\begin{cases} f_{ik} = f_i(t_k, y_{1k}, y_{2k}, \cdots, y_{mk}), & k = j-3, j-2, j-1, j \\ f_{i,j+1} = f_i(t_{j+1}, \bar{y}_{1,j+1}, \bar{y}_{2,j+1}, \cdots, \bar{y}_{m,j+1}), & i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

h 为积分步长。

由上述可知，龙格库塔积分方法容易起步，但计算量较大，尤其是当采用高阶龙格库塔积分法时，其计算量就更大；阿达姆茨积分法（或预报校正法）虽然不易起步，但其计算速度快。因此，求解像导弹主动段运动微分方程组这样庞大的初值问题时，一般是先采用易起步的龙格库塔法“造表头”（即计算前四步值），尔后转用计算速度较快的阿达姆茨积分法（常微分方程组的求解算法程序参见附录4）。

8.2.2 干扰弹道方程组的解算方法

描述干扰对弹道的影响及其与弹道参数偏差间关系的数学模型有两种：一种是将互为独立的各种干扰分别计入标准弹道方程中以建立其干扰弹道微分方程组；另一种则是在小干扰情况下导出弹道参数偏差与各干扰呈线性关系的所谓“摄动方程”组。由于前者是非线性变系数常微分方程组，所以只能用所谓数值积分的“求差法”求解；而后者因为是线性常微分方程组，所以宜采用所谓“微分法”（或称摄动法）求解。

1. 求差法

数值积分的“求差法”是指在给定初始条件下，应用数值积分方法分别求解标准弹道微分方程组和干扰弹道微分方程组，以获得标准弹道参数值和实际弹道参数值，实际弹道参数值减去标准弹道参数值之差，便为干扰作用下所产生的弹道参数偏差。具体说来，若

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{t}, \bar{x}_i) \\ \dot{x}_{ij} = f_i(t, x_{ij}, \lambda_j) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots) \tag{8-2.6}$$

分别表示标准弹道方程组和干扰弹道方程组（λ_j 为第 j 种干扰量）时，则在给定初始条件和干扰量下分别解得关机点标准弹道参数和干扰弹道参数以及射程

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\widetilde{x}_i(\widetilde{t}_k) \qquad \widetilde{L}(\widetilde{t}_c)$$
$$x_{ij}(t_k) \qquad L_j(t_c)$$

那么，第 j 种干扰量 λ_j 及其单位干扰量引起的弹道参数偏差及射程偏差即为

$$\begin{cases}\Delta x_{ij}(t_k) = x_{ij}(t_k) - \widetilde{x}_i(\widetilde{t}_k) \\ \Delta L_j(t_c) = L_j(t_c) - \widetilde{L}(\widetilde{t}_c)\end{cases} \tag{8-2.7}$$

及

$$\begin{cases}\Delta \bar{x}_{ij}(t_k) = \dfrac{1}{\lambda_j}\Delta x_{ij}(t_k) \\ \Delta \bar{L}_j(t_c) = \dfrac{1}{\lambda_j}\Delta L_j(t_c)\end{cases} \tag{8-2.8}$$

所有干扰 $\lambda_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 引起的总弹道参数偏差及总射程偏差为

$$\begin{cases}\Delta x_i = \sum\limits_{j=1}^{m}\Delta x_{ij}(t_k) \\ \Delta L(t_c) = \sum\limits_{j=1}^{m}\Delta L_j(t_c)\end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8-2.9}$$

“求差法”是解算干扰弹道方程组的行之有效的一种方法，其优点是无论干扰量多大或多小，均可精确计算。但其主要缺点是计算工作量比较大和可能引起较大的计算误差。这是因为只要有一种干扰，就需要解算一次干扰弹道方程组，而当干扰比较小时，所得干扰弹道参数值与标准弹道参数值很接近，两个相差很小的大数相减，必然会带来较大的计算误差。当然，在电子计算机飞速发展的今天，这两个缺点是完全可以克服的。此外，求差法还有一个缺点是因得不出解析解而无法分析各干扰对弹道参数的相互影响，因而在某些问题的研究应用上（如制导）受到限制。尽管如此，但由于求差法所具有的优点以及计算工具的发展，这一方法越来越得到人们的广泛采用。

2. *微分法*

“微分法”也叫“摄动法”。在一般情况下，如果标准条件选择适当，干扰即为小干扰，干扰弹道与标准弹道也相差很小，这样，可将干扰弹道在标准弹道近旁展成台劳级数，且取其一阶项来研究。因此，微分法实质上也就是小扰动线性化法。线性化后的弹道微分方程组可应用线性常微分方程理论来求解，从而得到干扰引起的弹道参数偏差和射程偏差。具体方法如下：若以

$$\dot{x}_i = \varphi_i(t, x_i, \lambda_j) \quad (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$$

表示 m 个小干扰 λ_j 下的 n 个运动参数 x_i 的非线性干扰弹道微分方程组，根据上述理论，将其在标准弹道附近展成台劳级数且取其一阶项，则得与上式相对应的线性微分方程组

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{j=}^{m} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_j}\lambda_j \\ \Delta\dot{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{j=}^{m} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_j}\lambda_j \\ \vdots \\ \Delta\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{j=}^{m} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \lambda_j}\lambda_j \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\delta x_i + \sum_{j=}^{m} \beta_{1j}\lambda_j \\ \delta\dot{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\delta x_i + \sum_{j=}^{m} \beta_{2j}\lambda_j \\ \vdots \\ \delta\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}\delta x_i + \sum_{j=}^{m} \beta_{nj}\lambda_j \end{cases} \tag{8-2.10}$$

其中

$$\alpha_{ii} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \qquad \beta_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j} \qquad (i = 1,2,\cdots,n;j = 1,2,\cdots,m)$$

(8-2.10)式称为摄动方程组，其中各系数 α_{ii}、β_{ij} 均为对标准弹道取值的已知时间的函数，α_{ii} 与干扰的性质无关，而 β_{ij} 则取决于干扰的特征。在给定初始条件下，求解上述摄动弹道方程组便可求得弹道参数偏差和射程偏差。

根据线性系统迭加原理，上述方程组与下列几个线性微分方程等价，即

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\delta x_i + \beta_{1j}\lambda_j \\ \delta\dot{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\delta x_i + \beta_{2j}\lambda_j \\ \vdots \\ \delta\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}\delta x_i + \beta_{nj}\lambda_j \end{cases} \tag{8-2.11}$$

解方程组(8-2.11)式，可得在 λ_j 单独作用下的弹道参数偏差$(\delta x_i)_j$，$(j = 1,2,\cdots,m)$。同理，根据线性迭加原理，在各种干扰作用下的弹道参数偏差可表为

$$\begin{cases} \delta x_1 = \sum_{j=1}^{m} (\delta x_1)_j \\ \delta x_2 = \sum_{j=1}^{m} (\delta x_2)_j \\ \vdots \\ \delta x_n = \sum_{j=1}^{m} (\delta x_n)_j \end{cases} \tag{8-2.12}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

如此看来，求弹道参数偏差的问题，就归结为求解摄动方程组的问题了。

下面以导弹主动段运动微分方程组为例，简单介绍摄动方程组的建立方法。

由于导弹主动段射程较小，在建立其摄动方程时，可以不考虑地球旋转和地球扁率的影响。当将导弹主动段运动分解为互相独立的纵向运动和侧向运动时，则从(6 - 4.30)式分解出简化的纵向运动方程组

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{1}{m}(P_e\cos\alpha - C_x qS_m - R'\delta_\varphi\sin\alpha) - g\sin\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{mV}(P_e\sin\alpha + C_y^\alpha \alpha qS_m + R'\delta_\varphi\cos\alpha) - \dfrac{g}{V}\cos\theta \\ \dot{x} = V\cos\theta \\ \dot{y} = V\sin\theta \\ \delta_\varphi = a_0^\varphi(\theta + \alpha - \varphi_{cx}) \\ \alpha = A^\varphi(\varphi_{cx} - \theta) \end{cases} \tag{8 - 2.13}$$

其中

$$\begin{cases} A^\varphi = \dfrac{a_0^\varphi R'(x_{ry} - x_z)}{a_0^\varphi R'(x_{ry} - x_z) + C_n^\alpha qS_m(x_y - x_z)} = \dfrac{a_0^\varphi M_{z_1}^\delta}{a_0^\varphi M_{z_1}^\delta + M_{z_1}^\alpha} \\ M_{z_1}^\delta = R'(x_{ry} - x_z) \\ M_{z_1}^\alpha = C_n^\alpha qS_m(x_y - x_z) \end{cases}$$

如设干扰为 λ_j，且将上式中 δ_φ、α 消去后，即得主动段摄动方程(推导从略)

$$\begin{cases} \delta\dot{V} = a_{11}\delta V + a_{12}\delta\theta + a_{13}\delta y + \dfrac{\partial\dot{V}}{\partial\lambda j}\delta\lambda j \\ \delta\dot{\theta} = a_{21}\delta V + a_{22}\delta\theta + a_{23}\delta y + \dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial\lambda j}\delta\lambda j \\ \delta\dot{x} = a_{31}\delta V + a_{32}\delta\theta \\ \delta\dot{y} = a_{41}\delta V + a_{42}\delta\theta \end{cases} \tag{8 - 2.14}$$

其中各系数为 a_{ik}

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
a_{11} = -\dfrac{X^v}{m} - \dfrac{1}{m}\dfrac{M^v_{Z_1}}{E}(X^v_c + R'\delta_\varphi + a^\varphi_0 R'\alpha) \\
a_{12} = -g\cos\theta - \dfrac{1}{m}a^\varphi_0 R'\alpha - \dfrac{1}{m}\dfrac{a^\varphi_0 M^\delta_{Z_1}}{E}(X^\alpha_c + R'\delta_\varphi + a^\varphi_0 R'\alpha) \\
a_{13} = -\dfrac{1}{m}(X^y - \dfrac{\partial p_e}{\partial y}) + \dfrac{2g\sin\theta}{r} - \dfrac{1}{m}\dfrac{M^y_{Z_1}}{E}(X^\alpha_c + R'\delta_\varphi + a^\varphi_0 R'\alpha) \\
a_{21} = -\dfrac{\dot\theta}{m} + \dfrac{Y^v}{mV} + \dfrac{1}{mV}\dfrac{M^v_{Z_1}}{E}(Y^\alpha_c - R'\alpha\delta_\varphi + a^\varphi_0 R') \\
a_{22} = \dfrac{g}{V}\cos\theta + \dfrac{a^\varphi_0 R'}{mV} + \dfrac{1}{mV}\dfrac{a^\varphi_0 M^\delta_{Z_1}}{E}(Y^\alpha_c - R'\alpha\delta_\varphi + a^\varphi_0 R') \\
a_{23} = \dfrac{1}{mV}(Y^y + \dfrac{\partial P_e}{\partial y}\alpha) + \dfrac{1}{V}\dfrac{2g}{r}\cos\theta + \dfrac{1}{mV}\dfrac{M^y_{Z_1}}{E}(Y^\alpha_c - R'\alpha\delta_\varphi + a^\varphi_0 R') \\
a_{31} = \cos\theta \\
a_{32} = -V\sin\theta \\
a_{41} = \sin\theta \\
a_{42} = V\cos\theta \\
E = -M^\alpha_{z_1} - a^\varphi_0 M^\delta_{z_1} \\
X_c = X - P_e\cos\alpha \\
Y_c = Y - P_e\sin\alpha \\
X^v = \dfrac{X}{V}(2 + \dfrac{M}{C_x}\dfrac{\partial C_x}{\partial M})
\end{cases}
\tag{8-2.15}
$$

而系数$\frac{\partial \dot V}{\partial \lambda j}$、$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda j}(j = 1,2,3,\cdots,m)$表示当弹道参数 V,θ,x,y 不变时，单独由于干扰 $\delta\lambda_j$ 所引起的 V 及 θ 的变化，可由 V,θ 分别对 λ_j 求导而获得。例如，如果由于导弹制造误差而使得实际空气动力系数 C_x 偏离于其标准值$\widetilde{C_x}$，即引起扰动 $\delta C_x = C_x - \widetilde{C_x}$ 时，那么，此干扰必将使作用于弹上的空气阻力 X 发生相应的变化δX。事实上，由于

$$X = C_x q S_m = C_x \frac{1}{2}\rho V^2 S_m$$

故干扰 δC_x 所引起的阻力变化为

$$\delta X = X - \widetilde{X} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_m \delta C_x = X\frac{\delta C_x}{C_x}$$

因为 δX 沿速度 $\boldsymbol{V}$ 的负方向，于是其作用结果将使导弹切向加速度 $\dot V$ 发生变化

$$\delta\dot V = -\frac{\delta X}{m} = -\frac{X}{mC_x}\delta C_x = \frac{\partial \dot V}{\partial C_x}\delta C_x$$

其中

$$\frac{\partial \dot V}{\partial C_x} = -\frac{X}{mC_x}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§8.3 弹道计算

由于标准弹道方程组和干扰弹道方程组都是非线性变系数常微分方程组，而且许多变系数值又不是以解析式给出的，因此，只能应用前边介绍过的数值积分方法求其数值解；此外又因弹道方程组十分庞杂，所以一般又只能借助于电子计算机进行求解。下面就弹道解算问题简要地作一介绍。

8.3.1 计算任务书

弹道解算是以《弹道计算任务书》(简称)《任务书》为依据的。《任务书》通常给出弹道数学模型、计算方法、计算精度以及解弹道时需要的全部数据和常数，其主要内容包括：

1. 标准条件

包括标准地球物理条件、标准气象条件和标准导弹诸元等。

2. 弹道方程

(1) 主动段弹道方程组

标准弹道方程组和干扰弹道方程组。

(2) 被动段弹道方程组。

3. 弹道分段

(1) 主动段

通常包含基本段、过渡段和后效段。

两级弹道导弹包含一级基本段、过渡段、后效段和二级基本段、过渡段、末速修正段、后效段。

(2) 被动段

被动段主要包括自由飞行段和再入段两部分弹道。

4. 原始参数值

包含有大气参数、气动力参数、发动机推力及推进剂秒流量随时间变化的关系式或数表、控制系统的常系数和变系数值等。

5. 计算要求

包括计算步长、落点计算精度、插值方法、数值积分方法以及计算结果的给出形式(数表或曲线)等。

6. 打印要求

包含打印参数名称和打印步长等。

8.3.2 弹道计算

弹道计算的方法和步骤如下：

1. 认真阅读《任务书》，弄清弹道数学模型中各方程式及各参变量间的相互关系，明确计算方法与打印要求。在认真阅读《任务书》的基础上，依据数学模型中各参变量出现的先后顺序排列计算式和命名各变量标识符，以减少因标识符多而易混乱所造成的差错。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

2. 编制计算程序

编制计算程序是一项能否顺利完成计算任务和能否获得正确计算结果的重要工作。而编制的计算程序质量的高低，则受程序框图设计是否合理和简练的制约。因此在编写程序前，一定要合理地设计各个分程序框图和计算程序总框图。

实践表明，在编制程序过程中，设计程序框图的工作要比其它工作困难得多，而且人们往往不太习惯或者不太愿意先设计程序框图，尔后再根据程序框图编制程序这样一个正确的工作程序，而是喜欢于在没有程序框图的情况下就匆忙着手编制程序。这样做的结果，不是错误百出，改不胜改，就是费尽九牛二虎之力，最终也难以获得满意的结果。采取根据程序框图编写计算程序的正确工作方法，不仅有利于程序的编制和调试，而且也便于查找计算中出现的错误。

在设计程序过程中，应注意以下几点：

(1) 在计算机容量许可的情况下，为便于分析和查找错误，在不同的程序段内应尽量避免使用同一标识符表示不同的参变量；

(2) 尽量使用计算机中的标准库过程和标准子程序，以减少编制程序的工作量；

(3) 对各弹道段公用的或多次重复使用的一些计算式，应尽可能地编写成子程序过程，以利于提高计算速度和精度。

3. 调试程序和计算

调试程序和计算是完成计算任务和获得最佳计算结果的关键，因此要慎之又慎，切不可匆忙从事。

关于上机计算问题，这里就不再详细讨论了。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第九章　弹道导弹的自由段运动

§9.1　运动微分方程及其积分

9.1.1 基本假设

在确定导弹射击诸元时，为提高落点精度，必须在计及诸如地球扁率、地球自转、扰动引力以及气动力等因素的影响下来寻求弹道方程的数值解。然而，如前所述，这项工作不仅繁杂和费时，而且也因得不到解析解给控制系统的分析和导弹初步设计带来一定困难。为此有必要对影响弹道的诸因素作出某种假定，以使描述导弹运动的微分方程获得解析解。

(1) 导弹的自由段运动是在真空中进行的

在自由段，导弹已飞行在距离地面几十公里乃至千公里的高空，那里的大气很稀薄，因而依赖于大气的空气动力的作用完全可以不予考虑。换言之，在自由飞行段，研究导弹的运动可以不考虑其运动姿态，而把它看作为一个质量集中于质心的质点进行研究，即视质点系动力学问题为质点动力学问题。

(2) 导弹仅受地球引力的影响

作为一种武器，导弹的飞行空域只限于近地空间，即使对洲际导弹而言，其飞行弹道的最高点距地面也只有 1000km 左右，而对其它距地球较近的月球来说，其与地球的距离却远达 3.8×10^5km。显然，除地球外，其它星球对导弹的影响是极其微小的。

(3) 不考虑地球的自转及其绕太阳的公转

根据计算，地球绕太阳的公转角速度为 0.0199×10^{-5}rad/s，而地球自转角速度为 7.29211×10^{-5}rad/s。这些量对导弹运动的基本规律并不起主导作用，即使对上万公里的远程弹道导弹来说，地球自转的影响充其量约占全射程的十分之一左右。因此地球自转及其绕太阳的公转均可不予考虑。

(4) 地球为一个质量分布均匀的圆球体

大家知道，尽管地球是一个表面起伏不平内部质量分布不均匀的近似椭球体，但因其扁率较小，作为一阶近似，完全可将其视为一质量分布均匀、平均半径为 6371000m 的圆球体。在上述基本假设下，完全可认为导弹的运动纯属在地球有心力场内的运动。研究导弹在有心力场内运动规律的理论称为椭圆弹道理论。而上述假设则称为椭圆弹道基本假设。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

9.1.2 运动微分方程及其积分

在上述基本假设下，由理论力学知，导弹的自由段飞行为一位于速度矢量与地球引力矢量所决定的平面内的运动，简称平面运动，该平面称为弹道平面。研究导弹在平面内的运动规律，采用极坐标最为方便。为此，我们选取以地心 o_e 为坐标原点、c 为初始极轴、r 为极轴和 f 为极角的极坐标系（图9－1）。显然，顺着飞行方向，若规定任一瞬时之极轴 r 与初始极轴 c 间的极角 f 为正时，那么相反的方向则应为负值。

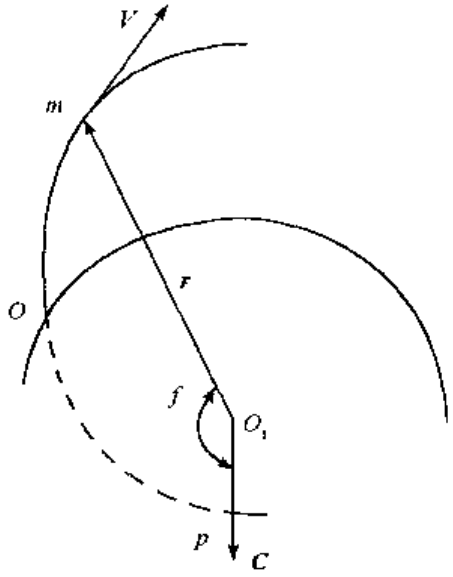


图9－1

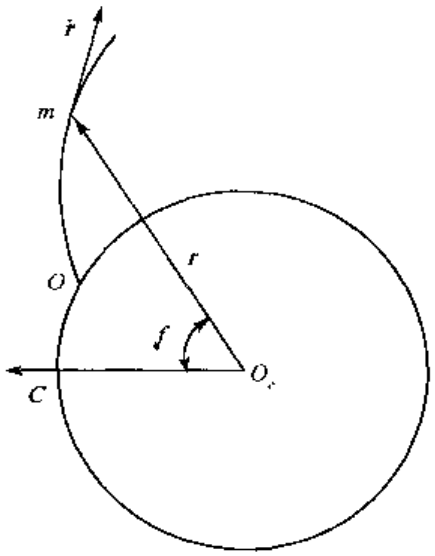


图9－2

根据万有引力定律，如设导弹某瞬时的质量为 m，地心矢径为 $\boldsymbol{r}$ 时，那么地球引力 $\boldsymbol{G}$ 的矢量式可表为

$$\boldsymbol{G} = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9-1.1}$$

式中 f 为引力常数，M 为地球质量。

根据牛顿第二定律，得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9-1.2}$$

式中，$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 为导弹质心加速度矢量，$\mu = fM$ 为地球引力常数。

位于有心力场内运动的导弹，遵循着动量矩矩守恒定律和机械能守恒定律。根据动量矩守恒定律可得导弹任一瞬时对地心的动量矩

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = constant \tag{9-1.3}$$

$\boldsymbol{h}$ 之大小为

$$h = r^2\dot{f} \tag{9-1.4}$$

$\dot{f}$ 为导弹绕地心运动时的角速度。

以 $\boldsymbol{h}$ 左乘(9－1.2)式，可得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\boldsymbol{h} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}[\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{r}] = -\frac{\mu}{r^3}[(\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}]$$

再应用三重矢量积式

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

展开上式,则有

$$\boldsymbol{h} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(r^2\dot{\boldsymbol{r}} - r\dot{r}\boldsymbol{r}) = -\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{9-1.5}$$

显然,(9-1.5)式的积分为

$$\boldsymbol{h} \times \dot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{c} \tag{9-1.6}$$

式中,$\boldsymbol{c}$ 为位于 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 组成的平面(即弹道平面)内的积分常矢量(图 9-2)。

(9-1.6)式与 $\boldsymbol{r}$ 之数量积为

$$(\boldsymbol{h} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \cdot \boldsymbol{r} = = -\mu r - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}$$

由于

$$(\boldsymbol{h} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}) = -h^2$$

及

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r} = cr\cos f$$

所以任一飞行瞬时导弹的地心距为

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{c}{\mu}\cos f}$$

若令

$$\begin{cases} P = \dfrac{h^2}{\mu} \\ e = \dfrac{c}{\mu} \end{cases} \tag{9-1.7}$$

时,则得在椭圆弹道假设条件下的导弹运动微分方程积分式

$$r = \frac{P}{1 + e\cos f} \tag{9-1.8}$$

(9-1.8)式称为椭圆弹道方程,或称导弹自由飞行段弹道方程。

§9.2 弹道方程的讨论

9.2.1 P、e、f 的意义及其与关机点参数的关系

由解析几何可知,(9-1.8)式为用极坐标表示的圆锥截线方程式。式中 e 为偏心率,它决定圆锥截线的形状;P 为半通径,它与 e 共同决定圆锥截线的大小(图 9-3)。当 $e > 1$ 时圆锥截线为双曲线,$e = 1$ 时为抛物线,$e < 1$ 时为椭圆。而当 $e = 0$ 时截线为一圆,这是椭圆曲线的一种特例。上述几种曲线所描述的轨道,统称为"开普勒轨道"。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

尽管根据偏心率 e 和半通径 P 只能画出圆锥截线，尚不能给出圆锥截线相对于极坐标系的位置，但由(9－1.8)式可以看出，当 P、e 给定后，圆锥截线上任一点到地心的距离 r 是极角 f 的函数。因此当令 $f = 0$ 时，地心距

$$r = \frac{p}{1+e} = r_{\min}$$

必为最小值，这就是说 f 表示了圆锥截线上任一点的地心距 r 与圆锥截线上模最小的矢径 $r_{\min}$ 间的夹角。在椭圆弹道理论中，此极角称为真近点角，而 $r_{\min}$ 对应的圆锥截线上的点 p 称为近地点。

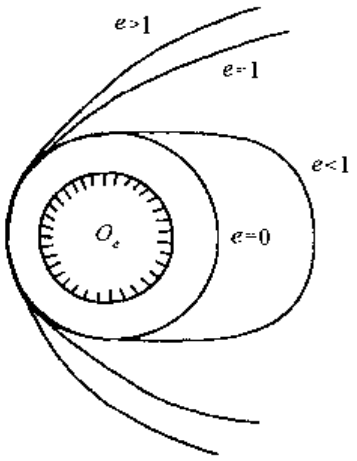


图 9－3

为寻求圆锥截线参数与导弹关机点参数的关系，设导弹主动段关机点 k(即自由飞行段起始点)处的速度为 V_k，地心距为 r_k 及弹道倾角为 Θ_k(图 9－4)，根据动量矩守恒定律则有

$$h = r_k V_k \cos\Theta_k \tag{9－2.1}$$

由(9－1.7)第一式，则半通径为

$$P = \frac{r_k V_k^2 \cos^2\Theta_k}{\frac{\mu}{r_k}} = r_k \nu_k \cos^2\Theta_k \tag{9－2.2}$$

式中

$$\nu_k = \frac{V_k^2}{\frac{\mu}{r_k}} \tag{9－2.3}$$

称为能量参数，为一无因次量，它反映了导弹主动段关机点动能的两倍与位能之比值(记距离地心无穷远处的位能为零)。

在近地点，因 $f_p = \Theta_p = 0$(Θ_p 为近地点速度倾角)，故由(9－1.8)式得该点地心距(图 9－5)。

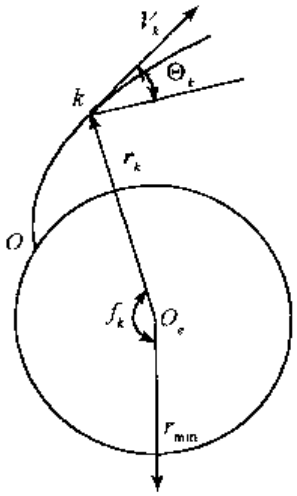


图 9－4

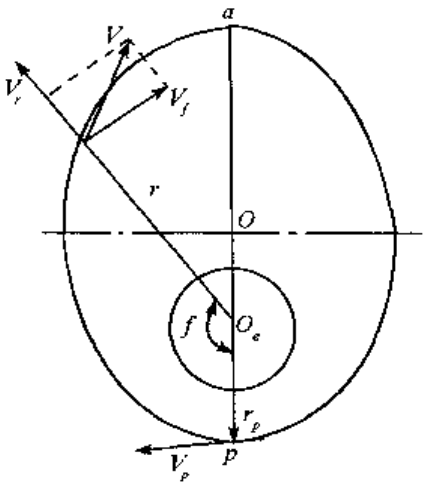


图 9－5

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$r_p = \frac{P}{1+e} \tag{9-2.4}$$

于是,动量矩又可表为

$$h = r_p^2 \dot{f}_p = r_p V_p$$

将(9-2.4)式及关系式

$$h = \sqrt{\mu P}$$

代入上式,则得近地点速度为

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{P}}(1+e) \tag{9-2.5}$$

由于在地球引力场内运动的导弹又遵循机械能守恒定律,故总机械能 E_n 可表为

$$E_n = \frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu}{r_p}$$

将(9-2.4)式及(9-2.5)式代入上式,则有

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{P}(1-e^2)$$

即

$$e = \sqrt{\frac{2PE_n}{\mu}+1} \tag{9-2.6}$$

用关机点参数表示的总机械能

$$E_n = \frac{1}{2}V_k^2 - \frac{\mu}{r_k} \tag{9-2.7}$$

将(9-2.2)式、(9-2.7)式代入(9-2.6)式,则得椭圆弹道偏心率 e 与主动段关机点参数间的关系式

$$e = \sqrt{1+\nu_k(\nu_k-2)\cos^2\Theta_k} \tag{9-2.8}$$

由(9-2.2)式和(9-2.8)式不难看出,圆锥截线参数完全由导弹主动段关机点参数来决定。相反地,当已知圆锥截线参数时,也可相应地确定导弹的弹道参数。

显然,由(9-1.8)式可求出真近点角为 f 时导弹质心的地心距离,即

$$r = \frac{P}{1+e\cos f}$$

由(9-1.8)式之微分式可得其径向速度

$$V_r = \dot{r} = \frac{P}{(1+e\cos f)^2}e\sin f\dot{f}$$

引入(9-1.4)式、(9-1.7)式及(9-1.8)式之结果

$$\dot{f} = \frac{h}{r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{P}}(1+e\cos f) \tag{9-2.9}$$

则径向速度可表为

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{P}}e\sin f \tag{9-2.10}$$

当然,也很容易得到导弹的周向速度和总速度以及弹道倾角

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} V_f = r\dot{f} = \sqrt{\dfrac{\mu}{P}}(1 + e\cos f) \\ V = \sqrt{V_r^2 + V_f^2} = \sqrt{\dfrac{\mu}{P}(1 + 2e\cos f + e^2)} \end{cases} \tag{9-2.11}$$

和

$$\Theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{V_r}{V_f} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{e\sin f}{1 + e\cos f} \tag{9-2.12}$$

9.2.2 圆锥截线形状与主动段关机点参数间的关系

(1) 当 $e = 0$ 时,则圆锥截线为圆,其半径可由弹道方程得到,即

$$r = P = r_k$$

此处根据

$$e = \sqrt{1 + \nu_k(\nu_k - 2)\cos^2\Theta_k}$$

可解得

$$\nu_k = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\Theta_k}}$$

由于能量参数 ν_k 不可能为虚数,所以必须 $\Theta = 0$ 时,上式才有实际意义。这表明只有在速度矢量 $\boldsymbol{V}_k$ 与当地水平面相平行的情况下,才能使质点的运动轨道为圆。在此条件下,$\nu_k = 1$,因此,由(9-2.3)式得

$$V_k = \sqrt{\frac{\mu}{r_k}}$$

通常记作

$$V_I = V_k = \sqrt{\frac{\mu}{r_k}} \tag{9-2.13}$$

V_I 称为第一宇宙速度,即质点成为卫星的最低速度。当 $V_k < V_I$ 时,其运动轨道将有一部分没入地球内,而另一部分即为导弹飞行轨道。

从能量观点分析,由于机械能守恒,因此,作圆周运动的质点任一时刻的速度 $V = V_k$,即质点作匀速圆周运动。而质点作匀速圆周运动时的离心惯性力恰好等于地球引力,即

$$\frac{V_k^2}{r_k} = \frac{\mu}{r_k^2}$$

这显然与(9-2.13)式的结果是一致的。

圆锥截线形状呈圆的条件为:

$$\begin{cases} V_k = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_k}} \\ \Theta_k = 0 \end{cases} \tag{9-2.14}$$

(2) 当 $e = 1$ 时,则圆锥截线为抛物线

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

根据

$$e = \sqrt{1 + \nu_k(\nu_k - 2)\cos^2\Theta_k} = 1$$

可得

$$\nu_k(\nu_k - 2)\cos^2\Theta_k = 0$$

由于 $\nu_k \neq 0$,因此不论 Θ_k 为何值($\Theta_k = 90°$ 除外),均应有 $\nu_k = 2$,则

$$V_k = \sqrt{\frac{2\mu}{r_k}} = \sqrt{2}V_1$$

通常记作

$$V_{\text{II}} = V_k = \sqrt{\frac{2\mu}{r_k}} \tag{9-2.15}$$

V_{II} 称为第二宇宙速度或逃逸速度,即运动质点成为航天飞行器的最低速度。在此情况下,运动质点将脱离地球引力作用而飞向宇宙空间。

从能量观点分析,由 $\nu_k = 2$ 可得

$$\frac{V_k^2}{2} = \frac{\mu}{r_k}$$

即机械能 $E_n = 0$,这表示运动质点任一时刻所具有的动能恰好等于将该点从 r_k 移至无穷远处时克服引力所作的功。当质点的能量参数 $\nu_k = 2$,不论 Θ_k 为何值,该质点将沿着抛物线轨道离开地球引力场而飞向宇宙空间,这又从能量观点证明了上述结论是正确的。

圆锥截线呈抛物线形状的条件为

$$\begin{cases} V_{\text{II}} = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_k}} \\ 0 \leqslant \Theta_k < 90° \end{cases} \tag{9-2.16}$$

(3) 当 $e > 1$ 时,则圆锥截线呈双曲线

由 e 的表达式不难看出,不论 Θ_k 为何值,此时应有 $\nu_k > 2$,即

$$V_k > \sqrt{\frac{2\mu}{r_k}} = V_{\text{II}} \tag{9-2.17}$$

从能量观点来看

$$\frac{V_k^2}{2} > \frac{\mu}{r_k}$$

即 $E_n > 0$。在此条件下,质点将沿着双曲线轨道飞向宇宙空间。

由于 $E_n > 0$,故当质点移至无穷远处时,有

$$\frac{V_k^2}{2} - \frac{\mu}{r_k} = \frac{V_\infty^2}{2}$$

即在距离地心无穷远处,质点具有速度 V_∞,此速度 V_∞ 称为双曲线剩余速度。

圆锥截线呈双曲线形状的条件为

$$\begin{cases} V_k > V_{\text{II}} \\ 0 \leqslant \Theta_k < 90° \end{cases} \tag{9-2.18}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(4) 当 $e < 1$ 时,则圆锥截线形状为椭圆

由表达式可知,此时 $v_k < 2$,即

$$V_k < \sqrt{\frac{2\mu}{r_k}} = V_{\text{II}} \tag{9-2.19}$$

从能量观点看

$$\frac{V_k^2}{2} < \frac{\mu}{r_k}$$

即 $E_n < 0$,这表明运动质点所具有的动能不足以摆脱地球引力场.故 r 为有限值。

圆锥曲线呈椭圆形状的条件为

$$\begin{cases} V_k < \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_k}} \\ 0 \leqslant \Theta_k < 90^\circ \end{cases} \tag{9-2.20}$$

9.2.3 椭圆几何参数与主动段关机点参数的关系

以极坐标表示的椭圆弹道方程中的几何参数 e、P 与 r_k、V_k、Θ_k 的关系已在(9-2.2)式和(9-2.8)式中给出。若能建立以直角坐标表示的椭圆弹道方程中的几何参数 a、b 与 e、P 的关系,也就间接地找到了 a、b 与 r_k、V_k、Θ_k 的关系。

事实上,以直角坐标系 oxy 表示的椭圆弹道方程式为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中 a 为椭圆长半轴,b 为短半轴(图 9-6)。

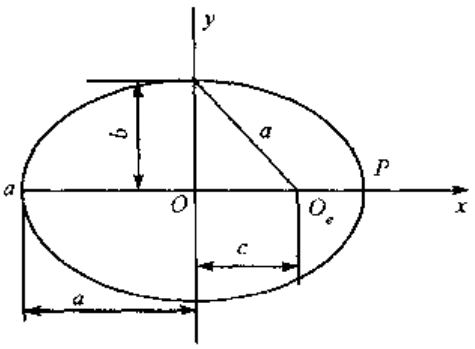


图 9-6

由前面分析可知,地心 o_e 为椭圆的一个焦点,p 为椭圆近地点,a 为其远地点。而 c 为椭圆的半焦距,其与 a、b 的关系表为

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ae \tag{9-2.21}$$

由(9-2.4)式知,椭圆上近地点 p 的地心距为

$$r_p = \frac{P}{1+e} \tag{9-2.22}$$

当 $f = \pi$ 时,则由椭圆弹道方程(9-1.8)式不难得出远地点 a 的地心距

$$r_a = \frac{P}{1-e} \tag{9-2.23}$$

于是椭圆长半轴 a 可表为

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{P}{1-e^2} \tag{9-2.24}$$

将由式

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{P}(1-e^2)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

导得

$$1 - e^2 = -\frac{2E_n P}{\mu}$$

代入(9－2.24)式,则 a 又可表为

$$a = -\frac{\mu}{2E_n} = -\frac{\mu r_k}{r_k V_k^2 - 2\mu} \tag{9-2.25}$$

由此可见,当 $E_n > 0$ 时,$a < 0$,即表示运动质点的轨道为双曲线;$E_n = 0$ 时,$a = \infty$,则又表为抛物线轨道,统称这类轨道为逃逸轨道。当 $E_n < 0$ 时,$a > 0$,为一有限值,即表示运动质点轨道为椭圆轨道。在此情况下,椭圆轨道长半轴 a 只与主动段关机点的机械能 E_n 有关,或者说只与主动段关机点参数 r_k 及 V_k 有关,而与速度倾角 Θ_k 无关,而且 E_n 越大,即绝对值越小,椭圆长半轴值 a 越大。当 E_n 一定时,不论椭圆扁的程度如何,其 a 为一恒定值(图 9－7)。

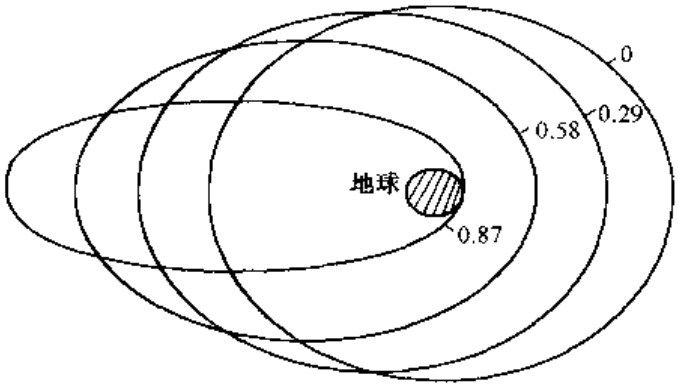


图 9－7

由于半焦距

$$c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$$

所以

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

将(9－2.24)式代入上式,则得

$$b = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{9-2.26}$$

再将(9－2.2)式、(9－2.8)式代入上式,则又得

$$b = \sqrt{\frac{\nu_k}{2 - \nu_k}} r_k \cos\Theta_k \tag{9-2.27}$$

由上式可知,椭圆弹道短半轴 b 不仅取决于主动段关机点参数 r_k、V_k,而且与弹道倾角 Θ_k 也有关。换言之,当椭圆弹道长半轴 a 一定时,由于弹道倾角 Θ_k 的不同,而使其短半轴 b 也不相同。

根据(9－2.25)式及机械能守恒方程式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$E_a = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

可得椭圆轨道上任一点的速度

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{9-2.28}$$

对于圆轨道，因 $r = a = r_c$，故得

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \tag{9-2.29}$$

即圆轨道速度为常值，它表示运动质点作匀速圆周运动。r_c 为圆轨道半径。

将(9-2.28)式中之 r 分别用 r_p、r_a 代替，且与(9-2.24)式联立，可分别得椭圆弹道近地点及远地点速度

$$\begin{cases} V_p = \sqrt{\dfrac{\mu r_a}{a r_p}} = \sqrt{\dfrac{2\mu r_a}{r_p(r_a + r_p)}} \\ V_a = \sqrt{\dfrac{\mu r_p}{a r_a}} = \sqrt{\dfrac{2\mu r_p}{r_a(r_a + r_p)}} \end{cases} \tag{9-2.30}$$

两地点速度之比

$$\frac{V_p}{V_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \tag{9-2.31}$$

可见，同一椭圆轨道上的远地点速度小于近地点速度，即 $V_a < V_p$。当 a 值一定时，e 值越大，其两地点速度差也越大。反之，速度差越小(图 9-8)。

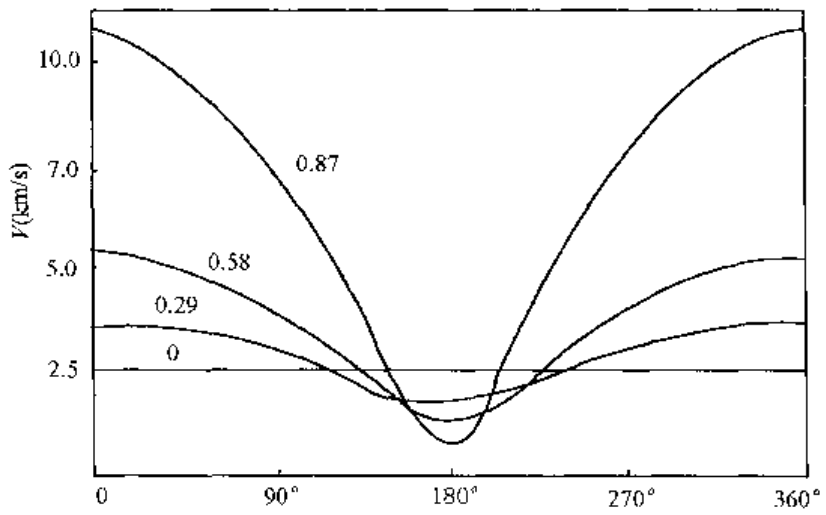


图 9-8

如果通讯卫星轨道的远地点距离地球表面的高度 h_a 为 39280km，近地点高度 h_p 为 480km，地球平均半径 R 为 6371km 时，那么，应用有关公式可得

$$r_a = R + h_a = 45651\text{km}$$

$$r_p = R + h_p = 6851\text{km}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.73902$$

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 26251\text{km}$$

$$P = a(1 - e^2) = 11914\text{km}$$

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_a}{r_p}} = 10.05\text{km/s}$$

$$V_a = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_p}{r_a}} = 1.509\text{km/s}$$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos f} = \frac{11914}{1 + 0.73902\cos f}$$

由式 $V = \dot{r}f$，可进一步求出卫星经过近地点和远地点处时的运动角速度

$$\dot{f}_a = \frac{V_a}{r_a} = 0.1136°/\text{s}$$

$$\dot{f}_p = \frac{V_p}{r_p} = 5.043°/\text{s}$$

由计算表明，该卫星轨道之近、远地点速度值或角速度值之间均有较大差别，因此，常把这类轨道称为大偏心率轨道。

§9.3 导弹被动段射程与主动段终点参数的关系

射程是导弹武器重要的战术指标之一。它不仅体现在已知导弹几个主要设计参数，如何估算导弹射程的全研制过程中，而且也表现在已给定射程时如何选择主动段终点参数，从而决定射击装订诸元的使用过程中。因而，讨论射程与主动段终点参数的关系是很必要的。

导弹在自由段飞行中，其运动轨道在由 $\boldsymbol{r}_k$ 与 $\boldsymbol{V}_k$ 所决定的平面内。该平面与地球表面的截痕为一圆弧，主动段终点 k 在地球表面上的投影与导弹落点 C 之间所对应的一段大圆弧的弧长称为导弹被动段射程，用 L_c 表示。k 点和再入点 e 在地面上的投影之间所对应的一段大圆弧长称为导弹自由段射程，用 L_e 表示。而再入点的投影与落点间的一段大圆弧长称为再入段射程，用 L_{er} 表示(图 9 - 9)。

对于再入段，由于导弹在稠密大气层中飞行，这就必然受到空气阻力的作用，因此再入段弹道不是椭圆弹道。但由于再入段射程在整个被动段射程中所占比例甚小，在计算导弹被动段射程时，可近似地将再入段弹道看作是自由段弹道的延续，因而可应用椭圆弹道理论计算被动段射程。

由图 9 - 9 看出

$$\begin{cases} L_c = R\beta_c = R(f_c - f_k) \\ L_e = R\beta_r = R(f_e - f_k) \end{cases} \tag{9 - 3.1}$$

式中 R 为地球平均半径，β_e 为导弹自由段射程角，β_c 为被动段射程角，f_k、f_e、f_c 分别为 k、

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

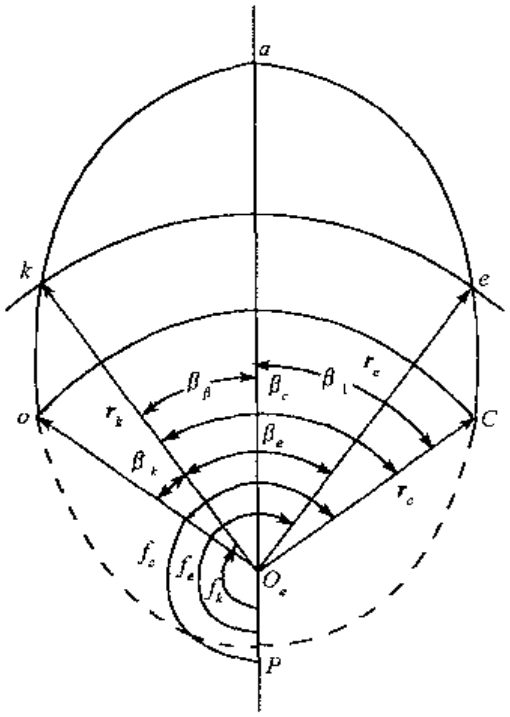


图 9 - 9

e、c 点对应的真近点角。

9.3.1 被动段射程的计算

由(9 - 3.1)式可知,要求出被动射程 L_c,必须求得真近点角 f_c 及 f_k。对主动段终点 k 和弹着点 C,显然,由(9 - 1.8)式可得

$$\begin{cases}\cos f_k = (P - r_k)/r_k e \\ \cos f_c = (P - R)/Re\end{cases} \tag{9 - 3.2}$$

由于椭圆弹道具有轴对称性,所以对于远地点 a 来说,则有

$$\angle ko_e a = \angle ao_e e = \frac{\beta_c}{2}$$

因此

$$\begin{cases}\cos f_k = \cos(\pi - \dfrac{\beta_e}{2}) = -\cos\dfrac{\beta_e}{2} \\ \cos f_c = \cos(f_k + \beta_c) = \cos(\pi - \dfrac{\beta_e}{2} + \beta_c) = -\cos(\beta_c - \dfrac{\beta_e}{2})\end{cases}$$

代入(9 - 3.2)式,则有

$$\begin{cases}\cos(\beta_c - \dfrac{\beta_e}{2}) = (R - P)/Re \\ \cos\dfrac{\beta_e}{2} = (r_k - P)/r_k e\end{cases}$$

或者

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\cos\dfrac{\beta_e}{2}\cos\beta_c + \sin\dfrac{\beta_e}{2}\sin\beta_c = (R-P)/Re \\ \cos\dfrac{\beta_e}{2} = (r_k - P)/r_k e\end{cases} \tag{9-3.3}$$

由(9-3.3)第二式,得

$$\sin\frac{\beta_e}{2} = \sqrt{1-\left(\frac{r_k-P}{er_k}\right)^2} = \frac{1}{er_k}\sqrt{r_k^2e^2-(r_k-P)^2}$$

将已知关系式

$$\begin{cases}e = \sqrt{1+\nu_k(\nu_k-2)\cos^2\Theta_k} \\ \nu_k = \dfrac{r_kV_k^2}{\mu}\end{cases}$$

代入上式,并考虑到关系式

$$P = r_k\nu_k\cos^2\Theta_k$$

故

$$\sin\frac{\beta_e}{2} = \frac{P}{er_k}\mathrm{tg}\Theta_k \tag{9-3.4}$$

当将(9-3.4)和(9-3.3)之第二式以及三角关系式

$$\begin{cases}\cos\beta_c = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta_c}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta_c}{2}} \\ \sin\beta_c = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta_c}{2}}\end{cases}$$

代入(9-3.3)第一式,便得

$$\left(1-\frac{P}{r_k}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}\right)+\frac{2P}{r_k}\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2} = \left(1-\frac{P}{R}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}\right)$$

引入关系式 $P = r_k\nu_k\cos^2\Theta_k$,经整理得

$$\left(2-\nu_k\cos^2\Theta_k-\frac{r_k\nu_k\cos^2\Theta_k}{R}\right)\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}-2\nu_k\cos^2\Theta_k\mathrm{tg}^2\Theta_k\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}+\nu_k\cos^2\Theta_k-\frac{r_k\nu_k\cos^2\Theta_k}{R} = 0$$

再将上式乘以 $R/\cos^2\Theta_k$,且考虑到

$$\frac{1}{\cos^2\Theta_k} = 1+\mathrm{tg}^2\Theta_k$$

时,则得方程式

$$[2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)-\nu_k(R+r_k)]\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}-2R\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}+\nu_k(R-r_k) = 0 \tag{9-3.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

令

$$\begin{cases} A = 2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k) - \nu_k(R+r_k) \\ B = 2R\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k \\ C = \nu_k(R-r_k) \end{cases} \tag{9-3.6}$$

于是方程式(9-3.5)成为

$$A\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2} - B\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2} + C = 0 \tag{9-3.7}$$

这是一个二次代数方程,应用其求解公式很容易求出 β_c。事实上,因为(9-3.7)式中之系数

$$\begin{aligned} A &\geqslant 2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k) - 2r_k\nu_k \\ &= 2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)(1-\frac{P}{R}) \\ &= -2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)e\cos f_c \geqslant 0 \\ C &= \nu_k(R-r_k) \leqslant 0 \end{aligned}$$

故(9-3.7)式的解应为

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2} = \frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{9-3.8}$$

在给定主动段终点参数 r_k、V_k 及 Θ_k 后,应用上式即可求得被动段射程角 β_c,进而求得被动段射程

$$L_c = R\beta_c$$

9.3.2 自由段射程的计算

有了被动段射程计算公式后,就很容易导出自由段射程计算公式。在(9-3.6)式中用 $r_c = r_k$ 代替 R,则有

$$\begin{cases} A = 2r_k(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k) - 2r_k\nu_k \\ B = 2r_k\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k \\ C = 0 \end{cases} \tag{9-3.9}$$

因此,(9-3.7)式成为

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2} = \frac{B}{A} = \frac{\nu_k\sin\Theta_k\cos\Theta_k}{1-\nu_k\cos^2\Theta_k} \tag{9-3.10}$$

上式即为导弹自由段射程角计算公式。

如果将 $P = r_k\nu_k\cos^2\Theta_k$ 代入(9-3.4)式,还可导出计算自由段射程角的另一简便又实用的公式

$$\sin\frac{\beta_c}{2} = \frac{\nu_k}{2e}\sin 2\Theta_k \tag{9-3.11}$$

这样,导弹自由段射程即为

$$L_c = R\beta_c$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

根据(9－3.8)式和(9－3.10)式,不难作出不同 h_k 值时的β_c、β_e 与ν_k、Θ_k 的关系曲线(图 9－10)。

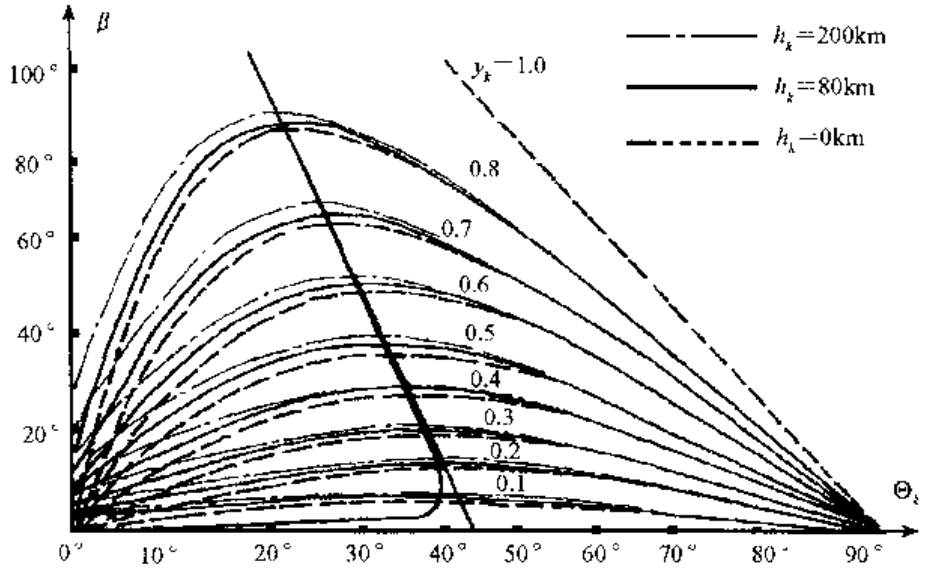


图 9－10

由图 9－10 看出,对于一定的 ν_k,总可以找到一个速度倾角 Θ_k 使射程最大,此速度倾角称为最佳速度倾角,常以 Θ_{KOPT} 表示。这就是说,在主动段终点参数 r_k、V_k 一定,即能量参数 ν_k 或关机点的机械能 E_n 一定时,Θ_{KOPT} 使导弹的能量得到充分利用,以使射程达到最大值。反过来说,对于给定的射程角 β_c 或β_e,使速度倾角取为最佳速度倾角 Θ_{KOPT} 时,导弹所需的能量为最小,即当主动段终点参数 r_k 一定时,其对应的速度 V_k 可取最小值。在弹道学中,常将这种具有最小 ν_k 值的弹道称为最小能量弹道。因此在进行弹道设计时,均应力求使 Θ_k 控制在最佳速度倾角Θ_{KOPT} 附近。

9.3.3 最佳速度倾角和最大射程

当主动段终点参数 r_k、V_k 给定后,根据求极值的原理,只需令$\dfrac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_k} = 0$,即可求得对应于最大射程角 β_{cmax} 之最佳速度倾角 Θ_{KOPT}。

事实上,因

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_k}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta_c}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\beta_c}{2}\frac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_k}$$

而

$$\sec^2\frac{\beta_c}{2} \neq 0$$

则$\dfrac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_k} = 0$,即等价于$\dfrac{\partial}{\partial \Theta_k}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\beta_c}{2}\right) = 0$。所以求对应的 Θ_{KOPT} 的问题,就归结为求$\dfrac{\partial}{\partial \Theta_k}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\beta_c}{2}\right) = 0$ 的问题。

这样,当将(9－3.7)式的两边对 Θ_k 求偏导时,可得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\partial A}{\partial \Theta_k}\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}-\frac{\partial B}{\partial \Theta_k}\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}+\left(2A\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}-B\right)\frac{\partial \mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}}{\partial \Theta_k}=0 \tag{9-3.12}$$

同样,将(9-3.6)式也对 Θ_k 求偏导,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial \Theta_k}=4R\mathrm{tg}\Theta_k sec^2\Theta_k\\[2ex]\dfrac{\partial B}{\partial \Theta_k}=2R\nu_k sec^2\Theta_k\end{cases} \tag{9-3.13}$$

代入(9-3.12)式,并令$\frac{\partial}{\partial \Theta_k}(\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2})=0$,因而

$$2Rsec^2\Theta_{KOPT}\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}\left(2\mathrm{tg}\Theta_{KOPT}\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}-\nu_k\right)=0$$

由于$2Rsec^2\Theta_{KOPT}\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}\neq 0$,所以

$$2\mathrm{tg}\Theta_{KOPT}\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}-\nu_k=0$$

由此得

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}=\frac{\nu_k}{2\mathrm{tg}\Theta_{KOPT}} \tag{9-3.14}$$

将其代入(9-3.7)式,经整理后得

$$[4(R-r_k)-2R\nu_k]\mathrm{tg}^2\Theta_{KOPT}=\nu_k^2(R+r_k)-2R\nu_k$$

即

$$\mathrm{tg}^2\Theta_{KOPT}=\frac{\nu_k[2R-(r_k+R)\nu_k]}{2[R\nu_k-2(R-r_k)]} \tag{9-3.15}$$

代入(9-3.14),最后得到

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}=\sqrt{\frac{\nu_k[R\nu_k+2(r_k-R)]}{2[2R-\nu_k(r_k+R)]}} \tag{9-3.16}$$

根据(9-3.16)式,对给定的 r_k、ν_k,可绘制出 $\Theta_{KOPT}=\Theta_k(\beta_{cmax})$ 之曲线(图9-11)。从图中看出,在射程角 β_c 的变化范围内,其最大射程角 β_{cmax} 所对应之最佳速度倾角 Θ_{KOPT} 的变化范围为 0 ~ 45°,且射程角较大时,随 β_{cmax} 的增加 Θ_{KOPT} 越来越小,基本上成线性反比关系。特别是对 $h_k=0$ 而言,当 β_{cmax} 接近于零时,则 $\Theta_{KOPT}=45°$,这正是火炮武器在地面射击时的最佳速度倾角。这一点很容易得到证实。

事实上,当 $r_k=R$ 时,由(9-3.15)式和(9-3.16)式可得出自由段最佳速度倾角 Θ_{KOPT}、最大射程角 β_{cmax} 间的关系式:

$$\mathrm{tg}\Theta_{KOPT}=\sqrt{1-\nu_k} \tag{9-3.17}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2}=\frac{\nu_k}{2}\sqrt{\frac{1}{1-\nu_k}} \tag{9-3.18}$$

将(9-3.17)式代入(9-3.18)式,则得 β_{cmax} 与 Θ_{KOPT} 的关系式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

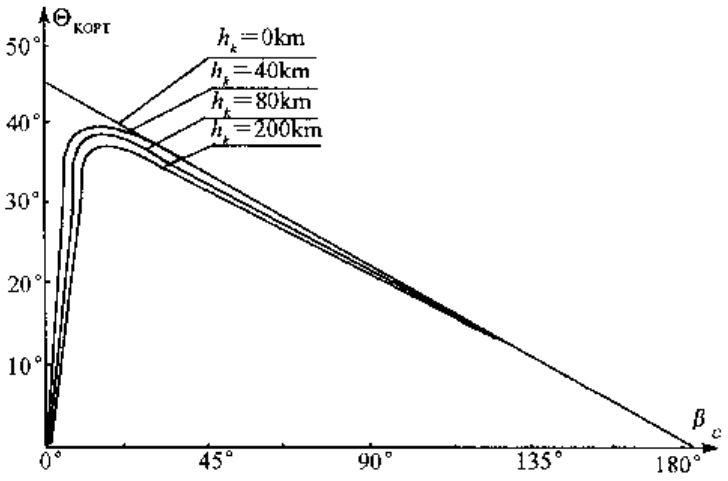


图 9 - 11

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_{cmax}}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\Theta_{KOPT}}{2\operatorname{tg}\Theta_{KOPT}} = c\operatorname{tg}2\Theta_{KOPT} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\Theta_{KOPT}\right)$$

从而有

$$\Theta_{KOPT} = \frac{1}{4}(\pi - \beta_{cmax}) \tag{9-3.19}$$

显然，当 $\beta_{cmax}=0$ 时，则 $\Theta_{KOPT}=45°$ 时，这再次证明在地面（$h_k=0$）真空环境中，取得最大射程的枪炮最佳速度烦角为 45°。

在一般情况下，虽然 $h_k \neq 0$，但在实际应用中，人们为了能迅速地估算射程，也常常采用(9 - 3.17) 和(9 - 3.18) 式。

§9.4 被动段飞行时间的计算

上面讨论中，为能求得运动方程的解析解，采用以极角 f 代替时间 t 作为自变量，因此解得的运动参数均是以 f 为自变量的函数 $r(f)$、$V(f)$ 和 $\Theta(f)$。然而在实际应用中，如对导弹进行光电监控，均需求出以时间 t 为自变量的飞行参数却更有意义。为此，我们首先介绍“面积速度”和“辅助圆”这两个即将用到的重要概念。

9.4.1 面积速度和周期

如图 9 - 12 所示，假设导弹 t 瞬时位于 P_1 点，而在 $t+\Delta t$ 时飞行到 P_2，两点至地心的距离分别为 r 及 $r+\Delta r$；如以 Δf 表示 O_eP_1 与 O_eP_2 两矢量之间的夹角，而以 $\Delta\sigma$ 表示 Δt 内极半径 r 扫过的面积。由图可知，扇形面积 $O_eP'_1P_2 > \Delta\sigma >$ 扇形面

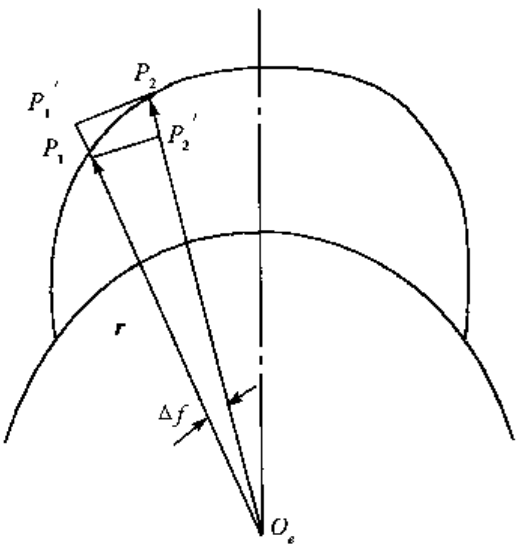


图 9 - 12

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

积 $O_eP_1P'_2$，即

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta f > \Delta\sigma > \frac{1}{2}r^2\Delta f$$

将上式同除以 Δt，且令 $\Delta t \to 0$ 取极限，则

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\dot{f} \tag{9-4.1}$$

引入动量矩守恒关系式

$$h = r^2\dot{f} = 常数$$

故

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}h = 常数 \tag{9-4.2}$$

$\dot{\sigma}$ 称为面积速度，其意义是指作椭圆运动的质点到地心的连线在单位时间内所扫过椭圆的面积为一常数，而其数值则等于该质点的动量矩的一半。

由解析几何可知，整个椭圆的面积为 πab，其中 a，b 分别为椭圆的长、短半轴的长度。因此质点绕椭圆运行一周的时间（即周期）为

$$T = \frac{\pi ab}{\dot{\sigma}} \tag{9-4.3}$$

将(9-2.24)式、(9-2.26)式及(9-4.2)式代入上式，则得

$$T = \frac{2\pi P^2}{h(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{9-4.4}$$

如果考虑到已有关系式 $h = \sqrt{P\mu}$、$b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}}$ 及 $a = \frac{P}{1-e^2}$ 时，则

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \tag{9-4.5}$$

由此可见，卫星运行周期只与其椭圆轨道的长半轴 a 有关（亦即只与机械能 E_n 有关），而长半轴 a 又仅仅是主动段终点参数 r_k、V_k 的函数，因此得出结论：沿长半轴相同的不同椭圆轨道运行的卫星，其运行周期相同。这一结论正是天体力学中最著名的开普勒第三定律的内容。

对于人造地球卫星来说，如果其椭圆轨道长半轴等于地球平均半径 $R = 6371000\text{m}$，那么其运行周期约为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}R^{\frac{3}{2}} = 84.4(\text{min})$$

可以确信，随着卫星椭圆轨道长半轴的增加，其运行周期也将越来越大。例如1964年我国发射的第一颗人造地球卫星，其轨道近地点高度 $h_p = 439\text{km}$，远地点高度 $h_a = 2384\text{km}$，由于其长半轴

$$a = \frac{1}{2}(2R + h_a + h_p) = 7783(\text{km})$$

因而其运行周期为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}} = 114(\text{min})$$

9.4.2 开普勒方程

如图 9 – 13 所示,若飞行器飞过近地点 p 的时间为 t_p,而飞至椭圆轨道上任意点 q 的时刻为 t,那么根据面积速度原理可得飞行器由近地点 p 到任意点 q 的时间为

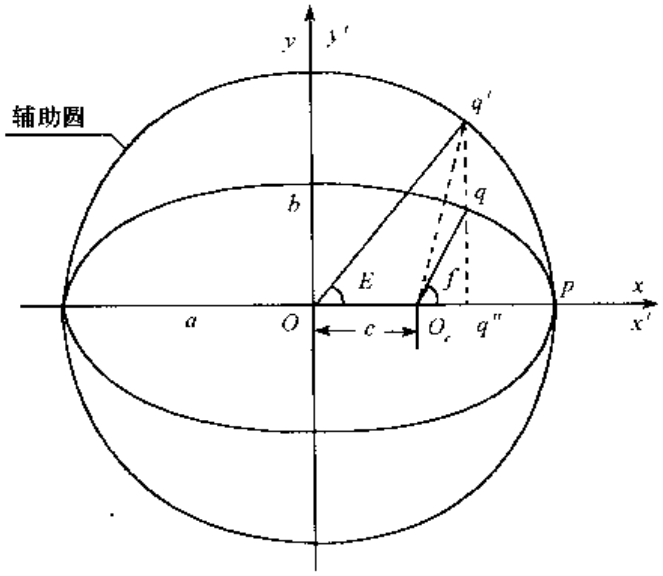


图 9 – 13

$$t - t_p = \frac{\sigma_{oqpq}}{\dot{\sigma}} \tag{9-4.6}$$

式中 σ_{oqpq} 为 o_cp 与 o_cq 所夹的椭圆面积。由于椭圆面积 σ_{oqpq} 难以求得,故引入以椭圆中心 o 为圆心、以椭圆长半轴 a 为半径所作的辅助圆的概念(图 9 – 13)。可以证明,辅助圆具有如下性质:(1) 辅助圆与椭圆上的点有一一对应的关系;(2) 飞行器在椭圆上飞行一周的时间与辅助圆上飞行一周的时间相等。事实上,在直角坐标系 oxy 中,椭圆方程表为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

现作如下线性变换,在直角坐标系 $ox'y'$ 中,令

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{b}{a}y' \end{cases} \tag{9-4.7}$$

则椭圆方程即变换为辅助圆方程

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \tag{9-4.8}$$

通过上述线性变换,就可将研究飞行器在椭圆上由 p 点到 q 点的飞行时间,改变为研究在辅助圆上由 p 点到 q' 点的飞行时间问题。

1. 在辅助圆上运行的面积速度 $\dot{\sigma}'$

在图 9 – 13 中,当令 $o_cq'' = d$, $q''q = y$, $q''q' = y'$, $o_cq = r$, $o_cq' = r'$ 时,则从 $\Delta o_cq''q$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

和 $\Delta o_e q'' q'$ 中，显然有

$$\begin{cases} \mathrm{tg}f = \dfrac{\gamma}{d} \\ \mathrm{tg}f' = \dfrac{\gamma'}{d} \end{cases}$$

由此得关系式

$$\mathrm{tg}f' = \frac{a}{b}\mathrm{tg}f \tag{9-4.9}$$

将上式两端对 t 求导数，得

$$(1 + \mathrm{tg}^2 f')\dot{f}' = \frac{a}{b}(1 + \mathrm{tg}^2 f)\dot{f} \tag{9-4.10}$$

且将关系式

$$\begin{cases} 1 + \mathrm{tg}^2 f' = 1 + \dfrac{\gamma'^2}{d^2} = \dfrac{r'^2}{d^2} \\ 1 + \mathrm{tg}^2 f = 1 + \dfrac{\gamma^2}{d^2} = \dfrac{r^2}{d^2} \end{cases}$$

代入，则有

$$r'^2\dot{f}' = \frac{a}{b}r^2\dot{f}$$

因

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{f} \\ \dot{\sigma}' = \dfrac{1}{2}r'^2\dot{f}' \end{cases}$$

故有

$$\dot{\sigma}' = \frac{a}{b}\dot{\sigma}$$

引入(9－4.3)式之变换式

$$\dot{\sigma} = \frac{\pi ab}{T}$$

则有

$$\dot{\sigma}' = \frac{\pi a^2}{T} = 常数 \tag{9-4.11}$$

由此看出，飞行器在对应的辅助圆上飞行的面积速度 $\dot{\sigma}'$ 也为常值，且因椭圆长半轴仅是主动段终点参数 r_k、V_k 的函数而与 Θ_k 无关。

2. 辅助圆的面积 $\sigma'_{o_e pq'}$ 和开普勒方程

记 q 所对应的辅助圆上 q' 点之圆心角为

$$\angle poq' = E$$

E 则称为偏近点角。

由于

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\sigma'_{o_epq'} = \sigma'_{opq'} - \sigma_{\Delta o_e q' o}$$

显然

$$\sigma'_{opq'} = \frac{1}{2}a^2 E$$

$$\sigma_{\Delta o_e q' o} = \frac{1}{2}oo_e \times q'q'' = \frac{1}{2}a^2 e\sin E$$

根据(9 - 4.6)式,便得

$$t - t_p = \frac{\sigma'_{o_epq'}}{\sigma'} = \frac{E - e\sin E}{\frac{2\pi}{T}} \tag{9 - 4.12}$$

令飞行器在椭圆上运行的平均角速度为

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{9 - 4.13}$$

于是

$$n(t - t_p) = E - e\sin E \tag{9 - 4.14}$$

等式左端表示飞行器从近地点开始在 $t - t_p$ 时间内以平均角速度 n 飞行过的角度,此角称为平近点角,用 M 表示,即有

$$M = n(t - t_p) \tag{9 - 4.15}$$

故(9 - 4.14)式为

$$M = E - e\sin E \tag{9 - 4.16}$$

上式称为开普勒方程。由此可知,若已知偏近点角 E,即可迅速求得飞行时间。但在实际应用中,往往会遇到从已知量 M 求解 E 的问题,这就需要解开普勒方程。由于开普勒方程是一超越方程,难于求得其解析解,所以这里仅介绍两种工程上常用的近似解法。

9.4.3 开普勒方程的近似解法

1. 图解法

将开普勒方程式(9 - 4.16)改写成如下形式

$$\sin E = \frac{1}{e}(E - M) \tag{9 - 4.17}$$

令

$$y = \sin E$$

则

$$y = \frac{1}{e}(E - M) \tag{9 - 4.18}$$

根据上面两式,作图 9 - 14,先作 $y = \sin E$ 的正弦曲线,然后在 E 轴上取长度为 M 的一段 OM,由 M 点作一斜率为 $\frac{1}{e}$ 的直线交正弦曲线于 N,再作 NN' 垂直 E 轴交于 N' 点。不难看出,ON' 即为开普勒方程的解 E。

2. 迭代法

先初步估算出的一个初始值 E_0,若其与精确值 E 之差为 ΔE,则

$$E = E_0 + \Delta E \tag{9 - 4.19}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

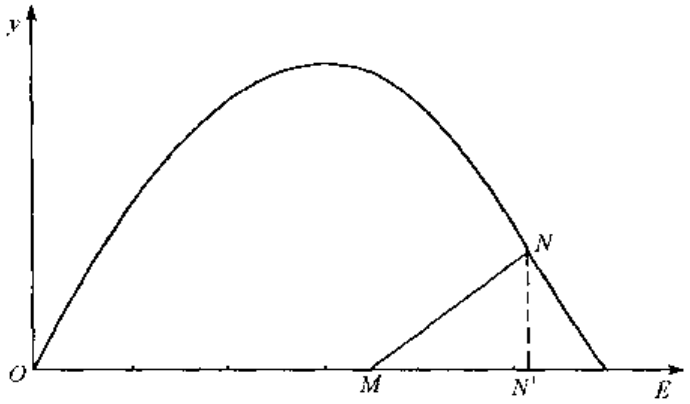


图 9 – 14

由 E_0 通过开普勒方程可算得对应于 E_0 之初值

$$M_0 = E_0 - e\sin E_0 \tag{9-4.20}$$

而 M_0 又与给定的 M 有误差

$$\Delta M = M - M_0 \tag{9-4.21}$$

然后利用 ΔM 去改正初值 E_0。于是当将(9 – 4.19) 代入开普勒方程时,得

$$M = E_0 + \Delta E - e\sin(E_0 + \Delta E)$$

再将上式中之正弦函数 $\sin(E_0 + \Delta E)$ 展开,并顾及 ΔE 不大情况下,可取

$$\begin{cases}\sin\Delta E \approx \Delta E\\ \cos\Delta E = 1\end{cases}$$

于是有

$$M = E_0 + \Delta E - e(\sin E_0 + \cos E_0\Delta E) \tag{9-4.22}$$

根据(9 – 4.20) 式和(9 – 4.22) 式又可写成

$$\Delta M = \Delta E(1 - e\cos E_0)$$

从而得

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e\cos E_0} \tag{9-4.23}$$

最后利用上式算得的 ΔE 去改正初值 E_0,即可得到 E 的第一次近似值

$$E_1 = E_0 + \Delta E$$

若 E_1 不满足精度要求,则将 E_1 取代(9 – 4.20) 式和(9 – 4.23) 式中之 E_0,求得第二次近似值 E_2,重复上述计算方法,直至求得的近似值 E_1 满足精度要求为止。

9.4.4 真近点角 f 与偏近点角 E 的关系

通常由椭圆弹道方程解得的弹道参数是以 f 为参变量,而要根据 f 求飞行时间,则需寻找 f 与 E 的关系。

由图 9 – 13 可知,在 $\Delta oq'q''$ 中有

$$q'q'' = y' = \frac{a}{b}y = \frac{a}{b}r\sin f$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

及

$$q'q'' = a\sin E$$

由此得

$$b\sin E = r\sin f$$

将已知关系式

$$\begin{cases} b = \dfrac{P}{\sqrt{1-e^2}} \\ r = \dfrac{P}{1+e\cos f} \end{cases}$$

代入上式,可得

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{1+e\cos f} \qquad (9-4.24)$$

同样,由图 9 - 13 知

$$oq'' = oo_e + o_eq''$$

而

$$\begin{cases} oq'' = a\cos E \\ oo_e = c \\ o_eq'' = r\cos f \end{cases}$$

故有

$$\cos E = e + \frac{r\cos f}{a}$$

将式

$$P = a(1-e^2)$$

$$r = \frac{P}{1+e\cos f}$$

代入上式得

$$\cos E = \frac{e+\cos f}{1+e\cos f} \qquad (9-4.25)$$

应用三角公式

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{1-\cos E}{\sin E}$$

即可得

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f}{2} \qquad (9-4.26)$$

该式说明$\frac{E}{2}$与$\frac{f}{2}$的象限是相同的。

根据(9 - 4.24)式及(9 - 4.25)式可得

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \qquad (9-4.27)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \tag{9-4.28}$$

将上两式分别代入(9-2.10)式～(9-2.12)式,并顾及(9-2.24)式,即可得飞行器任一时刻的速度和速度倾角

$$\begin{cases} V_r = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\dfrac{e\sin E}{1 - e\cos E} \\ V_f = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\dfrac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos E} \\ V = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\dfrac{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}{1 - e\cos E} \end{cases} \tag{9-4.29}$$

及

$$\Theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{e\sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{9-4.30}$$

此外,又由图9-13,因有

$$r^2 = (o_c q'')^2 + (qq'')^2$$

而

$$o_c q'' = a(\cos E - e)$$

$$qq'' = y = \frac{b}{a}y' = b\sin E = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

所以

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{9-4.31}$$

式(9-4.29)～(9-4.31)给出了V、Θ及r与偏近点角E的关系。若已知导弹主动段终点参数r_k、Θ_k、V_k、t_k,应用以上各式可解出任一时刻t时导弹所具有的运动参数$V(t)$、$\Theta(t)$、$r(t)$。其计算方法步骤可归纳如下:

(1) 根据主动段r_k、V_k、Θ_k计算出被动段椭圆弹道的几何参数a、b、P、e;

(2) 由a、e、r_k通过(9-4.31)式可解得偏近点角E_k;

(3) 将E_k、t_k代入开普勒方程可算得导弹飞经近地点的时间t_p;

(4) 根据给定的t及算得e、t_p,反解开普勒方程,得到对应t时刻的偏近点角$E(t)$;

(5) 应用(9-4.29)～(9-4.31)式即可求出t时刻的运动参数$V(t)$、$\Theta(t)$及$r(t)$。

9.4.5 被动段飞行时间和主动段终点参数的关系

应用上面所得结果很容易导出自由飞行段和被动段飞行时间。但在估算被动段飞行时间时,仍须将再入段弹道视为椭圆弹道的一部分。

事实上,若将导弹由近地点p飞至主动段终点k和落地点C的时间分别为t_{pk}及t_{pc}时,根据开普勒方程式(9-4.14)则有

$$\begin{cases} t_{pk} = \dfrac{1}{n}(E_k - e\sin E_k) \\ t_{pc} = \dfrac{1}{n}(E_c - e\sin E_c) \end{cases}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

式中 E_k、E_c 分别为导弹主动段终点 k 及落点 C 的偏近点角(图 9 - 15)。因而被动段飞行时间为

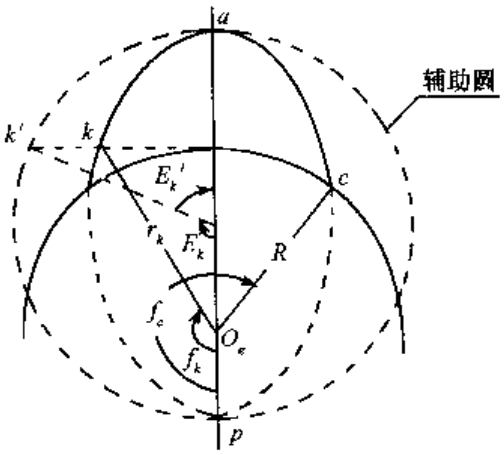


图 9 - 15

$$T_c = t_{pc} - t_{pk} = \frac{1}{n}[(E_c - E_k) - e(\sin E_c - \sin E_k)] \tag{9-4.32}$$

当给定主动段终点参数 r_k、V_k、Θ_k 后,欲求导弹飞至落点的时间,固然可通过先求 f_k、f_c,然后用关系式(9 - 4.26) 式求得 E_k、E_c,最后将其代入(9 - 4.32) 式即可求得导弹被动段飞行时间 T_c。但由于这种方法不便于写成 T_c 与 V_k、Θ_k、r_k 的显函数关系式,所以用下面方法来解决。

由图 9 - 15 可得

$$r_k\cos(\pi - f_k) = c + a\cos(\pi - E_k) \tag{9-4.33}$$

由于

$$\begin{cases}\pi - f_k = \dfrac{\beta_e}{2} \\ c = ae\end{cases}$$

则(9 - 4.33) 式即为

$$\cos(\pi - E_k) = \frac{r_k}{a}\cos\frac{\beta_e}{2} - e$$

由弹道方程得

$$r_k = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\dfrac{\beta_e}{2}}$$

代入上式,则有

$$\cos(\pi - E_k) = \frac{\cos\dfrac{\beta_e}{2} - e}{1 - e\cos\dfrac{\beta_e}{2}} \tag{9-4.34}$$

将(9 - 3.10) 式及(9 - 3.11) 式代入已知三角关系式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\cos\frac{\beta_e}{2} = \sin\frac{\beta_e}{2}/\lg\frac{\beta_e}{2}$$

有

$$\cos\frac{\beta_e}{2} = \frac{1-\nu_k\cos^2\Theta_k}{e}$$

代入(9-4.34)式

$$\cos(\pi - E_k) = \frac{1-\nu_k}{e}$$

于是

$$\begin{cases} E_k = \pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1-\nu_k}{e}\right) \\ \sin E_k = \sin\left[\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1-\nu_k}{e}\right)\right] = \sin\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{1-\nu_k}{e}\right)\right] \end{cases} \tag{9-4.35}$$

同理,对于落点 C 亦有类似关系式

$$\begin{cases} E_c = \pi + \cos^{-1}\left(\dfrac{1-\nu_c}{e}\right) \\ \sin E_c = -\sin\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{1-\nu_c}{e}\right)\right) \end{cases} \tag{9-4.36}$$

式中 ν_c 为 C 点的能量参数,它可由机械能守恒定理求得

$$\nu_c = \nu_k + (2-\nu_k)\frac{r_k - R}{r_k}$$

即

$$\nu_c = \nu_k + (2-\nu_k)\frac{h_k}{r_k} \tag{9-4.37}$$

将(9-4.35)式及(9-4.36)式代入(9-4.32)式,则有

$$T_c = \frac{1}{n}\left\{\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e} + \cos^{-1}\frac{1-\nu_c}{e} + e\left[\sin\left(\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\frac{1-\nu_c}{e}\right)\right]\right\} \tag{9-4.38}$$

注意到式(9-4.13)及(9-4.37)式,于是

$$T_c = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left\{\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e} + \cos^{-1}\frac{(1-\nu_k)-(2-\nu_k)\dfrac{h_k}{r_k}}{e} + e\left[\sin\left(\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\frac{(1-\nu_k)-(2-\nu_k)\dfrac{h_k}{r_k}}{e}\right)\right]\right\} \tag{9-4.39}$$

显然,如果要求自由段飞行时间,只需令 $\nu_c = \nu_k$,因而

$$T_c = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e} + e\sin\left(\cos^{-1}\frac{1-\nu_k}{e}\right)\right] \tag{9-4.40}$$

当椭圆弹道为最小能量弹道时,由于

$$\mathrm{tg}\Theta_{\mathrm{KOPT}} = \sqrt{1-\nu_k}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

而

$$1 + \mathrm{tg}^2\Theta_{KOPT} = \frac{1}{\cos^2\Theta_{KOPT}}$$

$$e = \sqrt{1 + \nu_k(\nu_k - 2)\cos^2\Theta_{KOPT}}$$

因此

$$e = \sqrt{1 - \nu_k}$$

将此式代入(9 - 4.40),便得在最小能量弹道条件下导弹自由段飞行时间

$$T_e = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\cos^{-1}\sqrt{1-\nu_k} + \sqrt{\nu_k(1-\nu_k)}\right] \qquad (9-4.41)$$

图 9 - 16 中,绘出了 h_k 为 0、80 和 200km 时不同 ν_k 下的被动段飞行时间 T_e 与 Θ_k 之关系。可以看出:当能量参数 ν_k 增大时,其飞行时间必将增长,这是因为 ν_k 增大时将使射程增大的缘故;当 Θ_k 增大时,飞行时间也必将增大,这完全是由于 Θ_k 的增大而使弹道高度增加的结果。

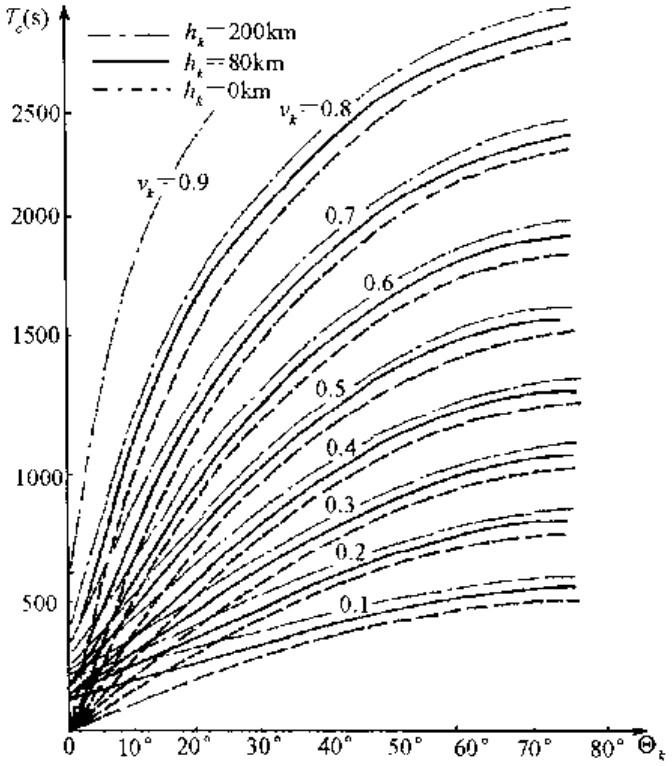


图 9 - 16

§9.5 误差系数

由上面讨论可知,导弹的被动段运动完全取决于主动段终点参数。在标准条件下,导弹始终处于主动段终点速度矢量 V_k 与地心矢径 r_k 所决定的平面内运动,弹着点与目标点重合。但事实上,导弹在主动段运动时可能受到各种不同因素的干扰,使主动段终点参数

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

产生偏差，从而产生落点偏差(图 9 - 17)。

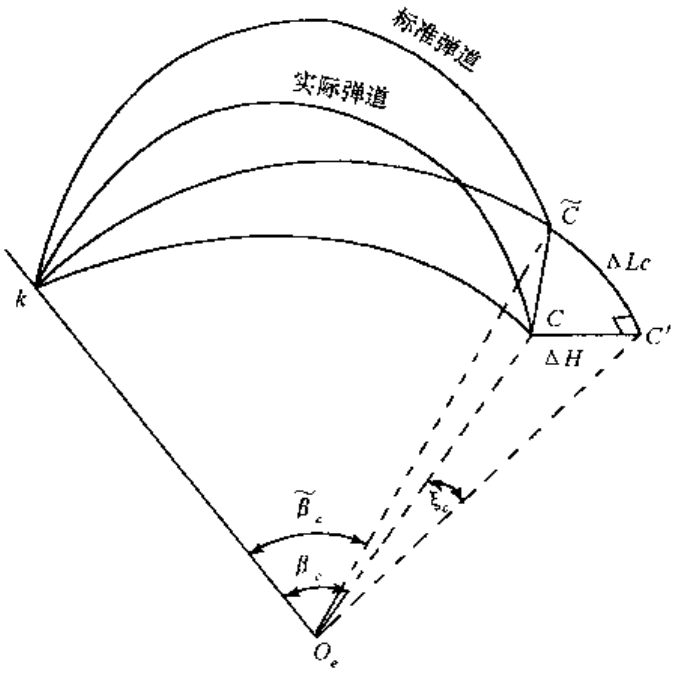


图 9 - 17

通常，将导弹实际落点 C 在射击平面内的投影点 C' 与目标点 $\widetilde{C}$ 间的距离称为纵向偏差，或称射程偏差，用 ΔL_c 表示。而落点与射击平面间的距离则称为横向偏差，或称侧向偏差，用表示 ΔH。

前已述及，导弹被动段射程是主动段终点参数 r_k、V_k、Θ_k 的函数。显然，被动段射程偏差(或射程角偏差 $\Delta\beta_c$) 也是主动段终点参数的函数，它们间的关系可表为

$$\Delta L_c = R\Delta\beta_c(r_k、V_k、\Theta_k)$$

导弹落点的横向偏差 ΔH 系因矢量 $\boldsymbol{r}_k$ 或 $\boldsymbol{V}_k$ 或二者共同偏离射击平面所引起的，其值由下式估量

$$\Delta H = \zeta_c R$$

式中 ζ_c 为落点横向偏差 ΔH 所对应的地心角。

误差系数泛指某个量与影响其值的单个量或诸量成比例的系数。这一节所要讨论的误差系数是指导弹落点偏差对主动段终点参数的偏导数，其中包括射程误差系数和横向误差系数。

9.5.1 射程误差系数

射程误差系数指射程对主动段终点参数的偏导数。

1. 射程误差系数

在基本假设条件下，被动段射程角与主动段终点参数的关系表为

$$\beta_c = \beta_c(r_k, V_k, \Theta_k)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

若主动段终点运动参数偏差不大时，可将上述函数式展开成台劳级数，且取一次项，则有

$$\Delta\beta_c = \frac{\partial\beta_c}{\partial r_k}\Delta r_k + \frac{\partial\beta_c}{\partial V_k}\Delta V_k + \frac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_k}\Delta\Theta_k \tag{9-5.1}$$

式中的各偏导数表示了运动参数变化一个单位时所引起的被动段射程角偏差。

将(9-3.5)式

$$[2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)-\nu_k(R+r_k)]\mathrm{tg}^2\frac{\beta_c}{2}-2\nu_k R\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}+\nu_k(R-r_k)=0$$

记为

$$F(\nu_k,\Theta_k,r_k,\beta_c)=0 \tag{9-5.2}$$

对上式求全微分，得

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial r_k}\mathrm{d}r_k+\frac{\partial F}{\partial\nu_k}\mathrm{d}\nu_k+\frac{\partial F}{\partial\Theta_k}\mathrm{d}\Theta_k+\frac{\partial F}{\partial\beta_c}\mathrm{d}\beta_c=0 \tag{9-5.3}$$

由于能量参数 ν_k 可表为

$$\nu_k=\nu_k(V_k,r_k)$$

故有

$$\mathrm{d}\nu_k=\frac{\partial\nu_k}{\partial V_k}\mathrm{d}V_k+\frac{\partial\nu_k}{\partial r_k}\mathrm{d}r_k \tag{9-5.4}$$

将上式代入(9-5.3)式，经整理后得

$$\mathrm{d}\beta_c=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial\beta_c}}\left[\frac{\partial F}{\partial\nu_k}\frac{\partial\nu_k}{\partial V_k}\mathrm{d}V_k+\frac{\partial F}{\partial\Theta_k}\mathrm{d}\Theta_k+\left(\frac{\partial F}{\partial\nu_k}\frac{\partial\nu_k}{\partial r_k}+\frac{\partial F}{\partial r_k}\right)\mathrm{d}r_k\right] \tag{9-5.5}$$

比较(9-5.1)与式(9-5.5)式，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_c}{\partial r_k}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial r_k}+\dfrac{\partial F}{\partial\nu_k}\dfrac{\partial\nu_k}{\partial r_k}\right)\Big/\dfrac{\partial F}{\partial\beta_c}\\[2ex]\dfrac{\partial\beta_c}{\partial V_k}=-\dfrac{\partial F}{\partial\nu_k}\dfrac{\partial\nu_k}{\partial V_k}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial\beta_c}\\[2ex]\dfrac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_k}=-\dfrac{\partial F}{\partial\Theta_k}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial\beta_c}\end{cases} \tag{9-5.6}$$

由此可见，只要推导出上式右端各偏导数，即可得到一阶射程角误差系数的表达式。

(1) 求$\dfrac{\partial F}{\partial\beta_c}$

将(9-5.2)式对 β_c 求偏导数，有

$$\frac{\partial F}{\partial\beta_c}=[2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)-\nu_k(R+r_k)]\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}sec^2\frac{\beta_c}{2}-R\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k sec^2\frac{\beta_c}{2} \tag{9-5.7}$$

由(9-3.5)式可知

$$[2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)-\nu_k(R+r_k)]\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}=\frac{2R\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}-\nu_k(R-r_k)}{\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}}$$

将此式代入(9-5.7)式，即得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_c} = \nu_k \frac{\sec^2 \frac{\beta_c}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2}} \left(R \operatorname{tg} \Theta_k \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} - R + r_k \right) \tag{9-5.8}$$

(2) 求$\frac{\partial F}{\partial \nu_k}$

将(9-5.2)式对 ν_k 求偏导数,有

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_k} = -(R + r_k)\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_c}{2} - 2R \operatorname{tg} \Theta_k \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} + (R - r_k) \tag{9-5.9}$$

由(9-3.5)式可知

$$-2R \operatorname{tg} \Theta_k \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} + (R - r_k) = -\frac{1}{V_k}\left[2R(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_k) - \nu_k (R + r_k)\right] \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_c}{2}$$

将其代入上式,即得

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_k} = -\frac{2R}{\nu_k}(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_k) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_c}{2} \tag{9-5.10}$$

(3) 求$\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$

将(9-5.2)式对 Θ_k 求偏导数,有

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta_k} = 4R \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_c}{2} \operatorname{tg} \Theta_k \sec^2 \Theta_k - 2R\nu_k \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} \sec^2 \Theta_k$$

经整理即得

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta_k} = 2R \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_k)\left(2 \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} \operatorname{tg} \Theta_k - \nu_k\right) \tag{9-5.11}$$

(4) 求$\frac{\partial F}{\partial r_k}$、$\frac{\partial \nu_k}{\partial V_k}$、$\frac{\partial \nu_k}{\partial r_k}$

类似于上述处理方法,可求得偏导数

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r_k} = \nu_k \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_c}{2}\right) \\ \dfrac{\partial \nu_k}{\partial V_k} = 2\dfrac{\nu_k}{V_k} \\ \dfrac{\partial \nu_k}{\partial r_k} = \dfrac{\nu_k}{r_k} \end{cases} \tag{9-5.12}$$

将上述各偏导数表达式一并代入(9-5.6),则得一阶误差系数表达式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_c}{\partial V_k}=\dfrac{4R}{V_k}\dfrac{(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)\sin^2\dfrac{\beta_c}{2}\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}}{\nu_k(r_k-R+R\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2})}\\ \dfrac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_k}=\dfrac{2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)(\nu_k-2\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}\mathrm{tg}\Theta_k)\sin^2\dfrac{\beta_c}{2}}{\nu_k(r_k-R+R\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2})}\\ \dfrac{\partial\beta_c}{\partial r_k}=\dfrac{\nu_k+\dfrac{2R}{r_k}(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)\sin^2\dfrac{\beta_c}{2}}{\nu_k(r_k-R+R\mathrm{tg}\Theta_k\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2})}\mathrm{tg}\dfrac{\beta_c}{2}\end{cases}\qquad(9-5.13)$$

在上式中，如果令 $R=r_k=r_c$，$\beta_c=\beta_e$，那么可得自由段射程角误差系数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta_e}{\partial V_k}=\dfrac{4(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)\sin^2\dfrac{\beta_e}{2}}{V_k\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k}\\ \dfrac{\partial\beta_e}{\partial\Theta_k}=\dfrac{(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)(\nu_k-2\mathrm{tg}\dfrac{\beta_e}{2}\mathrm{tg}\Theta_k)\sin\beta_e}{\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k}\\ \dfrac{\partial\beta_e}{\partial r_k}=\dfrac{\nu_k+2(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k)\sin^2\dfrac{\beta_e}{2}}{r_k\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k}\end{cases}\qquad(9-5.14)$$

被动段射程 L_c 对主动段终点参数 r_k、V_k、Θ_k 的误差系数可表为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_c}{\partial V_k}=R\dfrac{\partial\beta_c}{\partial V_k}\\ \dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}=R\dfrac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_k}\\ \dfrac{\partial L_c}{\partial r_k}=R\dfrac{\partial\beta_c}{\partial r_k}\end{cases}\qquad(9-5.15)$$

2. 射程误差系数的讨论

由(9－5.13)式和(9－5.15)式可知，射程误差系数$\dfrac{\partial L_c}{\partial V_k}$、$\dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}$、$\dfrac{\partial L_c}{\partial r_k}$均是$\nu_k$、$\Theta_k$和$r_k$(或$h_k=r_k-R$)的函数，据此即可绘出不同高度$h_k$时各射程误差系数随参数$\nu_k$和$\Theta_k$的变化曲线$\dfrac{\partial L_c}{\partial i_k}=f(\nu_k,\Theta_k)$。图9－18和图9－20示出了$h_k=80$km时，$\dfrac{\partial L}{\partial\Theta_k}$、$\dfrac{\partial L_C}{\partial r_k}$随$\nu_k$、$\Theta_k$变化的曲线，而图9－19则示出了$h_k=0$、80km时的$\dfrac{\partial L_c}{\partial V_k}=f(\nu_k,\Theta_k)$的变化曲线。由图9－18看出，对于一定的$\nu_k$，$\dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}$与$\Theta_k$的关系曲线有$\dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}=0$的点存在。这说明对应点之$\Theta_k$，若有微小偏差$\Delta\Theta_k$时，由其造成的射程偏差$\dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}\Delta\Theta_k=0$。由于对应$\dfrac{\partial L_c}{\partial\Theta_k}=0$之$\Theta_k$称为最佳速

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

度倾角 Θ_{KOPT}，因此，当 $\Theta_k = \Theta_{KOPT}$ 时，不仅可使被动段射程最大，而且还可减小因速度倾角偏差 $\Delta\Theta_k$ 所造成的射程偏差，从而提高导弹的落点精度。另外，当 $\Theta_k < \Theta_{KOPT}$ 时，$\frac{\partial L_c}{\partial \Theta_k}$ 随着 ν_k 的增大而显著的增大，而且为正值；反之，$\frac{\partial L_c}{\partial \Theta_k}$ 为负值，而且 $\left|\frac{\partial L_c}{\partial \Theta_k}\right|$ 也随 ν_k 增大而逐渐增大。

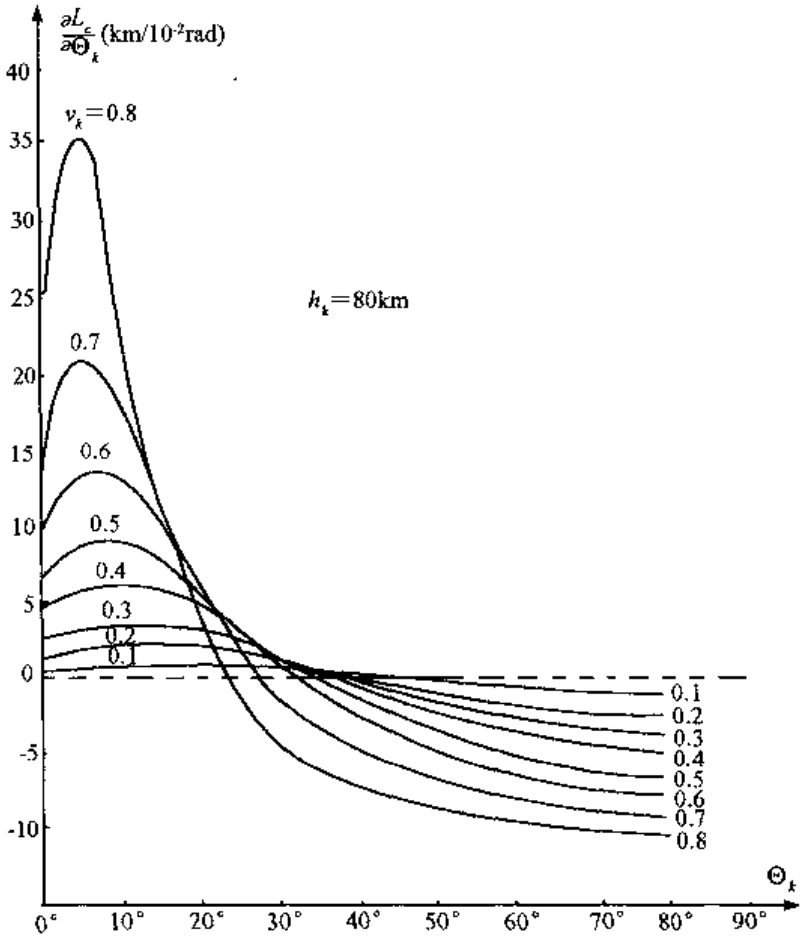


图 9 - 18

由图 9 - 19 可知，当 Θ_k 一定时，$\frac{\partial L_c}{\partial V_k}$ 随 ν_k 增加而增大，反之则反；这显然与导弹所获得的动能大小有关。此外还可看出，当 ν_k 一定时，对应于小的 ν_k 值，$\frac{\partial L_c}{\partial V_k}$ 随 Θ_k 的变化并不剧烈。而当 ν_k 值大时，其变化剧烈，特别是在 Θ_{KOPT} 附近，$\frac{\partial L_c}{\partial V_k}$ 值的变化相当大。因此，对于远程导弹而言，从减小因速度偏差 ΔV_k 所造成的射程偏差 $\frac{\partial L_c}{\partial V_k}\Delta V_k$ 的观点看，主动段终点的速度倾角 Θ_k 选取得应比 Θ_{KOPT} 稍大一些为宜。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

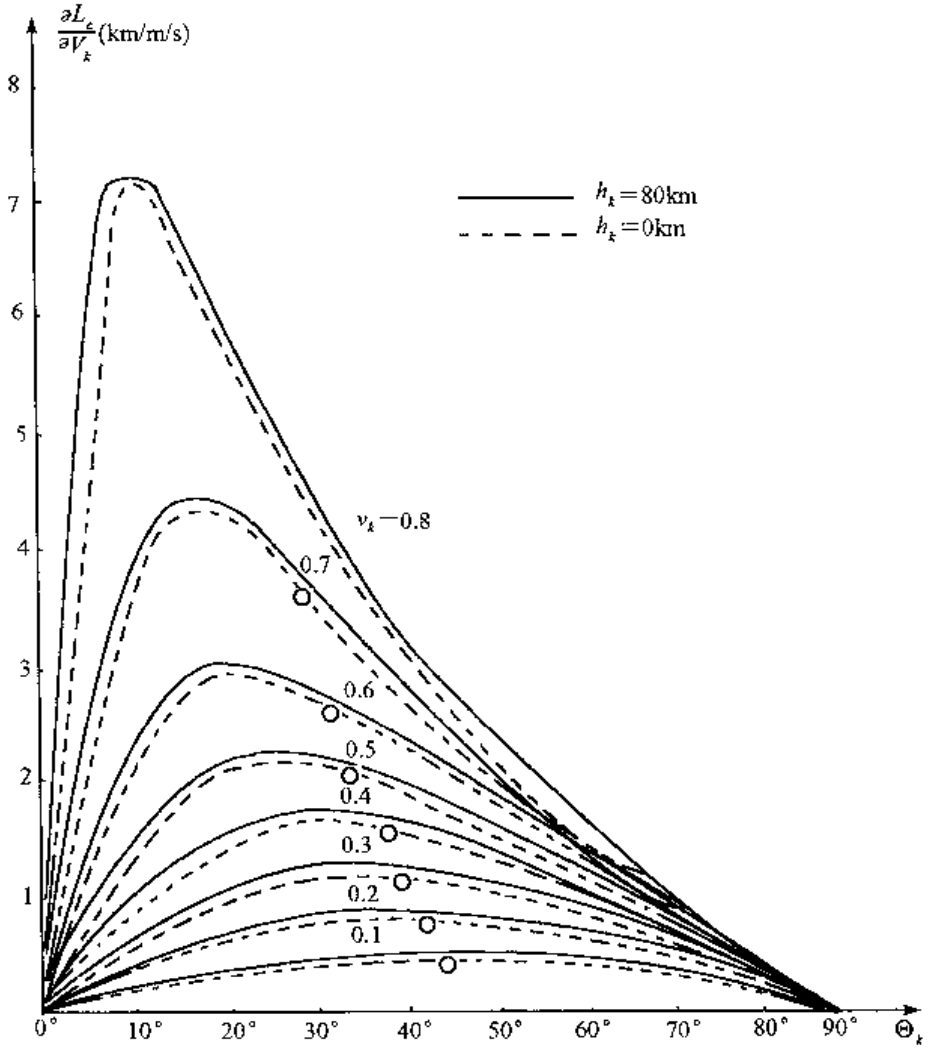


图 9 – 19

由图 9 – 20 可见，$\frac{\partial L_c}{\partial r_k}$ 随 ν_k 的增加而增大，这种影响将随着 ν_k 的增大而越趋显著。应当指出，虽然 $\frac{\partial L_c}{\partial r_k}$ 的数值远小于 $\frac{\partial L_c}{\partial V_k}$，但在一般情况下，由于偏差 Δr_k 较大，故由此所引起的射程偏差 $\frac{\partial L}{\partial r_k}\Delta r_k$ 也不可忽视。

3. 以直角坐标参数表示的射程误差系数

在射程偏差计算时，被动段射程误差系数也常常以主动段终点参数 V_k、Θ_k、x_k 及 y_k 的形式给出，因此被动段射程角偏差又可表为

$$\Delta\beta_c = \frac{\partial\beta_c}{\partial V_k}\Delta V_k + \frac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_k}\Delta\Theta_k + \frac{\partial\beta_c}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial\beta_c}{\partial y_k}\Delta y_k \qquad (9-5.16)$$

式中 $\frac{\partial\beta_c}{\partial x_k}$ 及 $\frac{\partial\beta_c}{\partial y_k}$ 分别为被动段射程角对主动段终点参数 x_k 及 y_k 的偏导数，Δx_k 和 Δy_k 为主动段终点坐标偏差量。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

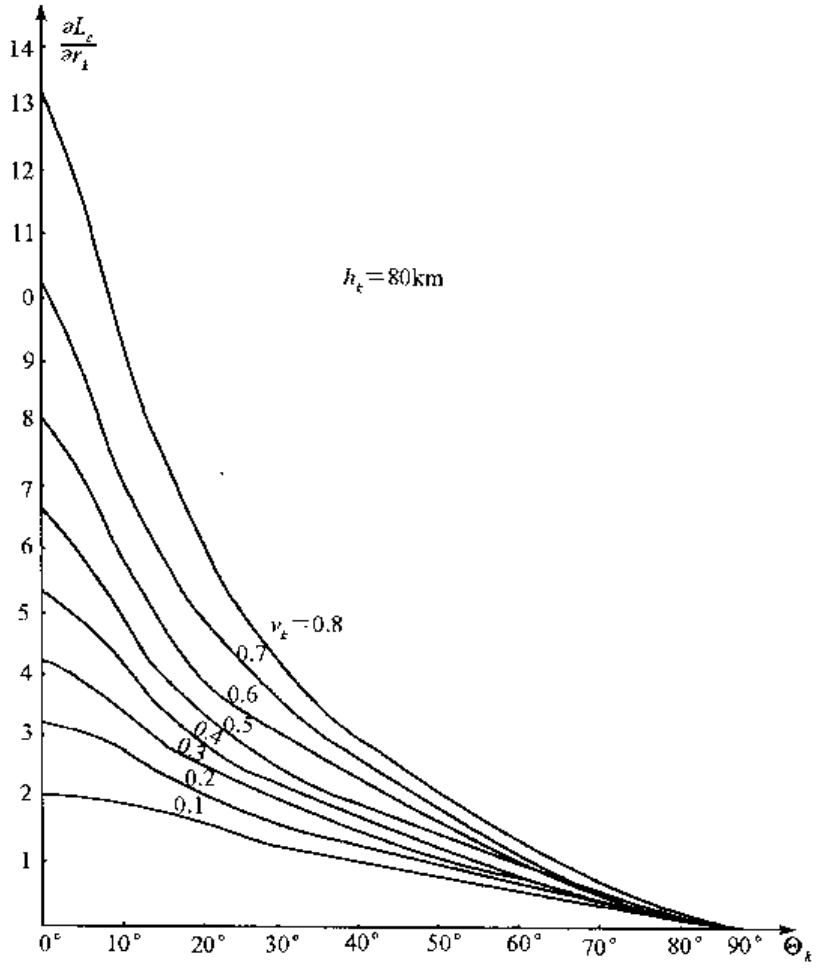


图 9 – 20

根据图 9 – 21,可求得关系式

$$\begin{cases} x_k = r_k \sin\beta_k \\ y_k = r_k \cos\beta_k - R \\ \Theta_k = \theta_k + \beta_k \\ r_k = \sqrt{x_k^2 + (y_k + R)^2} \\ \beta_k = \sin^{-1}\dfrac{x_k}{r_k} = \cos^{-1}\dfrac{R + y_k}{r_k} \end{cases} \tag{9 – 5.17}$$

式中 β_k 为主动段射程角。

将(9 – 5.17) 中之后三式展成台劳级数,且取一次项,则有

$$\begin{cases} \Delta\Theta_k = \Delta\theta_k + \Delta\beta_k \\ \Delta r_k = \dfrac{\partial r_k}{\partial x_k}\Delta x_k + \dfrac{\partial r_k}{\partial y_k}\Delta y_k \\ \Delta\beta_k = \dfrac{\partial \beta_k}{\partial x_k}\Delta x_k + \dfrac{\partial \beta_k}{\partial y_k}\Delta y_k \end{cases} \tag{9 – 5.18}$$

此外再将(9 – 5.17) 式中之第一、二式进行微分,有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

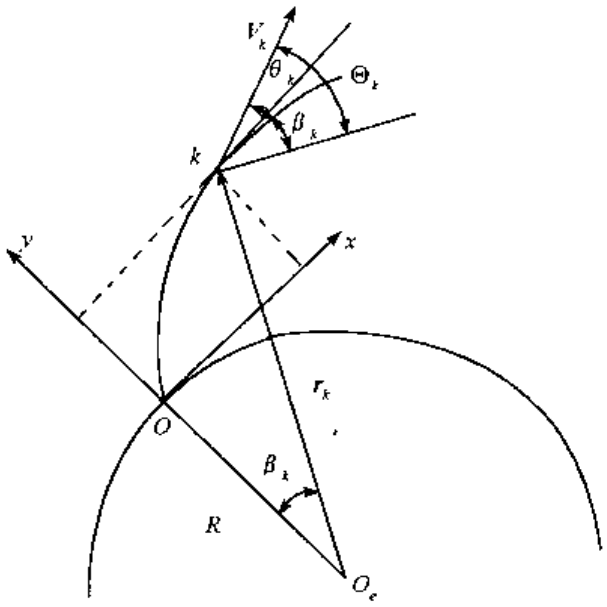


图 9 - 21

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_k = \sin\beta_k \mathrm{d}r_k + r_k\cos\beta_k \mathrm{d}\beta_k \\ \mathrm{d}y_k = \cos\beta_k \mathrm{d}r_k - r_k\sin\beta_k \mathrm{d}\beta_k \end{cases}$$

以 $\mathrm{d}r_k$ 及 $\mathrm{d}\beta_k$ 为自变量解此方程组，并以全增量近似代替其全微分

$$\begin{cases} \Delta r_k = \sin\beta_k \Delta x_k + \cos\beta_k \Delta y_k \\ \Delta\beta_k = \dfrac{1}{r_k}\cos\beta_k \Delta x_k - \dfrac{1}{r_k}\sin\beta_k \Delta y_k \end{cases} \tag{9-5.19}$$

比较(9 - 5.19) 与(9 - 5.18) 之第二、三式，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_k}{\partial x_k} = \sin\beta_k \\ \dfrac{\partial r_k}{\partial y_k} = \cos\beta_k \\ \dfrac{\partial \beta_k}{\partial x_k} = \dfrac{1}{r_k}\cos\beta_k \\ \dfrac{\partial \beta_k}{\partial y_k} = -\dfrac{1}{r_k}\sin\beta_k \end{cases} \tag{9-5.20}$$

因此(9 - 5.18) 式可改写成

$$\begin{cases} \Delta\Theta_k = \Delta\theta_k + \Delta\beta_k \\ \Delta\beta_k = \dfrac{1}{r_k}\cos\beta_k \Delta x_k - \dfrac{1}{r_k}\sin\beta_k \Delta y_k \\ \Delta r_k = \sin\beta_k \Delta x_k + \cos\beta_k \Delta y_k \end{cases} \tag{9-5.21}$$

将(9 - 5.21) 式代入(9 - 5.1) 式，并与(9 - 5.10) 式进行比较，便得以直角坐标系运动参数表示的误差系数与以极坐标参数表示的误差系数间的转换关系式：

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_c}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\beta_k}{r_k} & \sin\beta_k \\ 0 & -\frac{\sin\beta_k}{r_k} & \cos\beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_c}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial r_k} \end{bmatrix} \tag{9-5.22}$$

4. 全射程角误差系数

若 $\Delta\beta$ 表示全射程角偏差，那么以误差系数表示的全射程角偏差可表为

$$\Delta\beta = \frac{\partial \beta}{\partial V_k}\Delta V_k + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_k}\Delta\theta_k + \frac{\partial \beta}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial \beta}{\partial y_k}\Delta y_k \tag{9-5.23}$$

由于导弹全射程为主动段射程和被动段射程之和，因此全射程角偏差等于主动段射程角偏差与被动段射程角偏差之和，即

$$\Delta\beta = \Delta\beta_k + \Delta\beta_c$$

将(9-5.21)中之第二式和(9-5.16)式代入上式，并与(9-5.23)式比较，便得全射程误差系数与主动段射程角和被动段射程角误差系数间的关系矩阵式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_c}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \beta_c}{\partial y_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\cos\beta_k}{r_k} \\ -\frac{\sin\beta_k}{r_k} \end{bmatrix} \tag{9-5.24}$$

9.5.2 横向误差系数

横向误差系数指导弹落点横向偏差对主动段终点参数的偏导数。前已述及，当主动段终点的位置矢 $\boldsymbol{r}_k$ 或速度矢 $\boldsymbol{V}_k$ 或两者同时偏离射击平面时，均将造成落点的横向偏差，下面予以讨论。

1. $\boldsymbol{V}_k$ 偏离射击平面时引起的横向误差系数

在标准条件下，若 k 为导弹主动段终点 k 在地球表面上的投影，对应于标准射程角 $\bar{\beta}_c$ 之主动段终点的标准参数为 $\boldsymbol{r}_k$ 及 $\boldsymbol{V}_k$ 时，那么初始射击平面必由 $\boldsymbol{r}_k$ 及 $\boldsymbol{V}_k$ 所决定。但当存在干扰而使主动段终点的实际速度矢 $\boldsymbol{V}_k'$ 偏离初始射击平面时，其实际弹道平面则由 $\boldsymbol{r}_k$ 与 $\boldsymbol{V}_k'$ 所决定，这样便出现射击方位角偏差 Δa_k(图 9-22)。

当令

$$|\boldsymbol{V}_k| = |\boldsymbol{V}_k'|$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

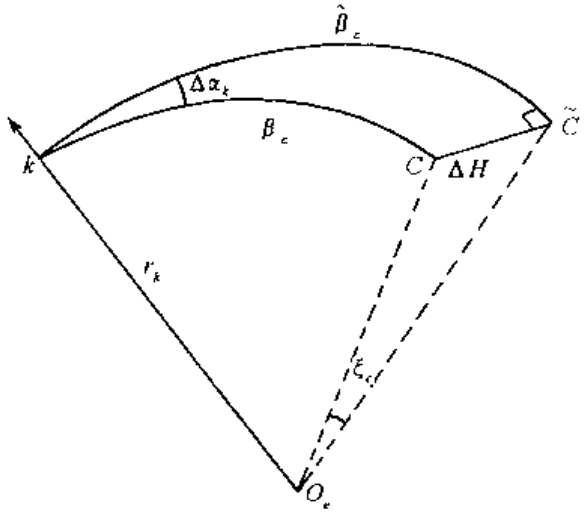


图 9 – 22

且 V_k、V_k' 与 k 点的切平面间的夹角仍为 Θ_k 时，则被动段射程将保持不变，即有

$$L_c = R\beta_c = R\tilde{\beta}_c$$

但实际弹道却因射击方位角偏差 $\Delta\alpha_k$ 的存在而引起落点横向偏差

$$\Delta H = R\zeta_c$$

式中 ζ_c 为对应于落点横向偏差 ΔH 之地心角。

通常，在横向导引系统作用下，导弹主动段终点速度 V_k 偏离射面的方位角偏差 $\Delta\alpha_k$ 为一小量，在近似认为 $\overset{\frown}{\tilde{C}C}$ 垂直于 $k\overset{\frown}{\tilde{C}}$ 的情况下，根据球面直角三角形定理，则有

$$\sin\zeta_c = \sin\beta_c \sin\Delta\alpha_k$$

与被动段射程角 β_c 相比，ζ_c 和 $\Delta\alpha_k$ 均为小量，故在一阶近似条件下

$$\zeta_c = \sin\beta_c \Delta\alpha_k \tag{9 – 5.25}$$

因此，横向偏差角误差系数为

$$\frac{\partial\zeta_c}{\partial\Delta\alpha_k} = \sin\beta_c \tag{9 – 5.26}$$

不难理解，当导弹主动段终点速度偏离射面时，就必然具有垂直于射击平面的分速度 V_{zk}，而且规定：顺射击方向看去，当 V_{zk} 指向右方时为正，反之为负。

由图 9 – 23 不难看出，V_{zk} 与 $\Delta\alpha_k$ 有如下关系

$$\sin\Delta\alpha_k = \frac{V_{zk}}{V_k\cos\Theta_k}$$

在 V_{zk} 不大的情况下，可近似认为

$$\Delta\alpha_k = \frac{V_{zk}}{V_k\cos\Theta_k} \tag{9 – 5.27}$$

将此式代入(9 – 5.25) 式，又可得横向误差系数

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

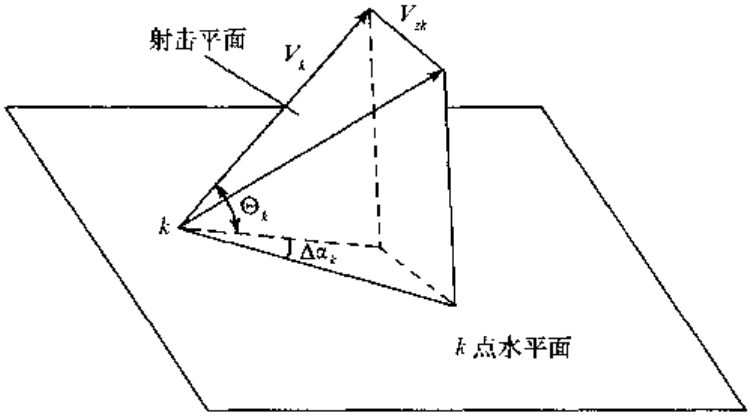


图 9 - 23

$$\frac{\partial \zeta_c}{\partial V_{zk}} = \frac{\sin\beta_c}{V_k \cos\Theta_k} \tag{9 - 5.28}$$

2. r_k 偏离射面时引起的横向误差系数

r_k 偏离射击平面，即表示该导弹在主动段终点处存在有侧向偏差 z_k。导弹在控制系统作用下，一般都满足 $z_k \ll r_k$，故通常可用侧向角位移偏差量(图 9 - 24)。

$$\zeta_k = \frac{z_k}{r_k}$$

来表示主动段终点的位置偏差，ζ_k 的正负同样规定为：顺射击方向看去，z_k 在右方时为正，反之为负。当 ζ_k 不存在时，导弹应在标准主动段终点参数 r_k 和 V_k 所决定的平面 $\overset{\frown}{ko_eA}$ 内飞行，其落点为 $\tilde{C}$，射程角为 $\tilde{\beta}_c$。但当 ζ_k 存在时，导弹必将在偏离初始射击平面内飞行。为导得 ζ_k 引起的落点偏差之误差系数，我们首先过地心 o_e 作平行于 V_k 的直线 o_eA，其与 $\overset{\frown}{k\tilde{C}}$ 的延长线交于 A 点，然后再绕 o_eA 直线将射面 $\overset{\frown}{k\tilde{C}}$ 旋转一地心角 ζ_k 至 o_ek' 位置，从而得新的弹道平面 $\overset{\frown}{o_ek'A}$。在该平面内，由于 V_k、r_k 均与参数 V_k、r_k 保持不变，因而其射程角仍为 $\tilde{\beta}_c$，但其落点却落在 C 处。由于 $\overset{\frown}{kk'}$ 及 $\overset{\frown}{\tilde{C}C}$ 均很小，故仍可近似地将它们看成与原射面垂直。若以 ζ_c 表为 $\overset{\frown}{\tilde{C}C}$ 所对应的地心角时，则在球面直角三角形 $A\tilde{C}C$ 中，有

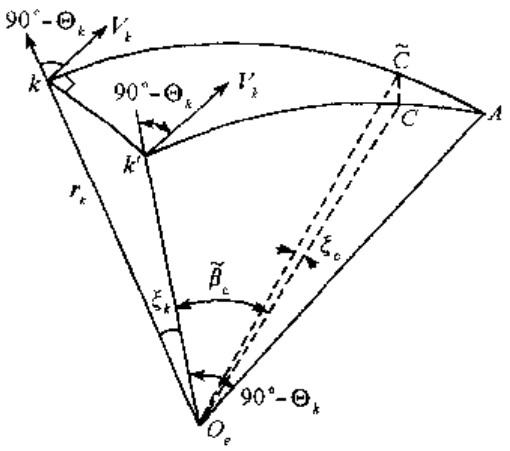


图 9 - 24

$$\sin\zeta_c = \sin A \sin(90° - \Theta_k - \beta_c) \tag{9 - 5.29}$$

而在球面直角 $\Delta kk'A$ 中，有

$$\sin\zeta_k = \sin A \sin(90° - \Theta_k) \tag{9 - 5.30}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

由上两式得

$$\sin\zeta_c = \sin\zeta_k \frac{\cos(\Theta_k + \beta_c)}{\cos\Theta_k}$$

或

$$\sin\zeta_c = \sin\zeta_k(\cos\beta_c - \mathrm{tg}\Theta_k\sin\beta_c)$$

因 ζ_k、ζ_c 均为小量，于是有近似式

$$\zeta_c = \zeta_k(\cos\beta_c - \mathrm{tg}\Theta_k\sin\beta_c) \tag{9-5.31}$$

将 ζ_c 对 ζ_k 求偏导数，即得 r_k 偏离射面时所引起的横向误差系数

$$\frac{\partial\zeta_c}{\partial\zeta_k} = \cos\beta_c - \mathrm{tg}\Theta_k\sin\beta_c \tag{9-5.32}$$

通常情况下，主动段终点参数 V_k 及 r_k 均有可能同时存在偏离射面的偏差量 $\Delta\alpha_k$ 及 ζ_k 及，此时所引起的横向偏差则可应用线性迭加原理表为

$$\zeta_c = \frac{\partial\zeta_c}{\partial\Delta\alpha_k}\Delta\alpha_k + \frac{\partial\zeta_c}{\partial\zeta_k}\zeta_k \tag{9-5.33}$$

式中的误差系数可由(9-5.26)式及(9-5.32)式求得。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第十章　考虑地球旋转及其扁率时导弹被动段弹道计算

在椭圆弹道理论一章中，我们已讨论了地球为不旋转圆球体时导弹被动段的飞行规律。但事实上，地球并非是圆球体，即使在一阶近似条件下，也只能视为正常椭球体。此外，地球也并非是静止不动的，即使不考虑其绕太阳的公转和其他复杂运动，地球却仍以 7.292115×10^{-5} rad/s 的角速度绕其自身轴不停地由西向东转动。这样，由于地球的自转和扁率的影响，必然使导弹的实际弹道偏离其标准的椭圆弹道，从而造成落点偏差。因此，在进一步研究导弹被动段运动时，必须考虑上述因素的影响。只有这样，才能使我们更接近于实际情况，比较精确地掌握导弹的运动规律和提高其落点精度。

§ 10.1　考虑地球旋转时的被动段弹道计算

研究地球旋转对导弹运动的影响，一般有动力学和运动学两种方法。

10.1.1　动力学方法

众所周知，导弹的运动取决于作用在它上面的力。这里所谓用动力学方法讨论地球旋转对导弹运动的影响，就是指因地球旋转而产生的牵连惯性力和柯氏惯性力对导弹被动段运动的影响问题。

不考虑地球旋转时，导弹相对地球的运动为绝对运动，其运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{F}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{V}}$ 为导弹相对地球运动的绝对加速度矢，$\boldsymbol{F}$ 为作用在导弹上的诸力矢量和。

对运动方程进行积分，可得导弹对不旋转地球的运动规律。由椭圆弹道理论知，在不考虑地球旋转和再入段空气阻力作用时的被动段导弹只受地球引力作用，其弹道位于由 $\boldsymbol{r}_k$ 和 $\boldsymbol{V}_k$ 所决定的平面内，且为椭圆弹道曲线的一部分。

考虑地球旋转时，导弹相对地球的运动为相对运动，其被动段导弹质心运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_e) \tag{10-1.1}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \dot{\boldsymbol{V}}_c + \dot{\boldsymbol{V}}_e$$

式中 $\boldsymbol{F}_e$ 及 $\boldsymbol{F}_c$ 分别为由于地球旋转所产生的牵连惯性力和柯氏惯性力，其矢量表达式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_e = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\dot{\boldsymbol{V}}_e \\ \boldsymbol{F}_c = 2m\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega} = m\dot{\boldsymbol{V}}_c \end{cases} \tag{10-1.2}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$\boldsymbol{\omega}$ 为地球旋转角速度矢，$\boldsymbol{V}$ 为导弹相对地球的运动速度矢，$\boldsymbol{r}$ 为导弹质心的地心距矢径，$\dot{\boldsymbol{V}}_e$ 及 $\dot{\boldsymbol{V}}_c$ 分别为牵连加速度矢和柯氏加速度矢。

由(10－1.2)一式可知，牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_e$ 处于沿 $\boldsymbol{r}$ 矢端作平行于赤道平面的平行圈内，指向为沿着过该平行圈的半径方向。因此，在地球为圆球的情况下，如若由主动段终点参数 r_k、V_k 所决定的平面与赤道平面或子午面重合时，则 $\boldsymbol{F}_e$ 的作用只会使射面内的弹道参数发生变化而不会使导弹产生偏离射面的运动，即此时只会造成射程偏差，而不会引起横向偏差。但若 $\boldsymbol{F}_e$ 不在射面内时，则其作用结果，不但使导弹产生射程偏差，面且还将引起横向偏差。

由(10－1.2)二式可知，当导弹在赤道平面内运动时，则 $\boldsymbol{F}_c$ 也在该平面内，其作用结果，也将使弹道平面内的运动参数发生变化，从而造成射程偏差，但不会产生横向偏差。除上述特殊情况外，$\boldsymbol{F}_c$ 的作用结果不但使导弹产生射程偏差也将会产生横向偏差。

在地球为圆球体，且不计再入段空气阻力的条件下，求解 §7.1 中给出的导弹被动段运动微分方程组，便可得地球旋转时的导弹被动段运动规律。若使其与不考虑地球旋转时的运动规律进行比较，即可进一步得到地球旋转对导弹运动的影响。关于牵连惯性力和柯氏惯性力的数学表达式以及导弹被动段运动微分方程组，我们已分别在第六章和第七章中讨论过了，所以这里就不再重述。

10.1.2 运动学方法

应用运动学方法研究地球旋转对导弹运动的影响是以椭圆弹道理论为基础的一种方法，它较之动力学方法要方便得多，因而常常应用于弹道的初步设计阶段。由前可知，椭圆弹道理论是不计地球旋转影响而建立的一种弹道理论，它所给出的结果只能是导弹被动段绝对运动的结果。在考虑地球旋转的情况下，仍用椭圆弹道理论研究导弹的被动段运动，就必须计入地球自转因素的影响。

为定量描述地球旋转对导弹运动的影响，设想在地球表面外套一与地球大小一样的惯性球壳，它在发射前随地球一起转动，但从发射瞬时起则固定在惯性空间不动(图 10－1)。

在此惯性球壳上，不但可以表示出发射点和目标点的相对位置，面且还可表示它们相对惯性球壳的绝对位置。若以 o_0、o_k、o_c 分别表示发射时刻、关机时刻和落地时刻发射点在惯性球壳上的位置，k 为关机时刻导弹在惯性球壳上的投影，C 为落点位置以及 λ_{s0}、φ_{s0}、λ_{sk}、φ_{sk} 和 λ_{sc}、φ_{sc} 分别表示发射点、关机点和落点的地心经度和纬度，则 $\lambda_{sc}-\lambda_{s0}$、$\lambda_{sk}-\lambda_{s0}$ 即分别为落点与发射点、关机点与发射点之经度差，而 ωt_k 与 ωT_c 分别为导弹在主动段和被动段飞行时间 t_k、T_c 内，发射点所转过的角度。显然，我们要求的导弹射程是指在惯性球壳上从 $O_c(T_c)$ 到 $C(T_c)$ 的大圆弧长。若此大圆弧长所对应的地心角用 Φ 表示时，则在地球平均半径为 R 的情况下，所求射程可表为

$$L = R\Phi \tag{10－1.3}$$

大圆弧 $\overset{\frown}{O_cC}$ 与子午线所形成的球面角 ψ_Φ 则称为落点对发射点的球面方位角，这个角度的大小完全决定了导弹落点相对发射点的方位。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

下面，我们就利用惯性球壳上各点间的几何关系及椭圆弹道理论的一些主要结果来讨论落点经纬度以及落点偏差的计算方法。

1. 确定椭圆弹道运动的初始条件

我们知道，导弹主动段弹道计算是在发射点惯性坐标系中进行的。因此，主动段终点参数 i_k、V_{ik}（$i = x, y, z$）自然是已知的，但在应用椭圆弹道理论时需要知道初始速度的大小和方向，而此方向应当用相对关机点矢径的角度来表示。为此，我们引入关机点惯性直角坐标系 $kx_Ay_Az_A$，以便建立它与发射点惯性直角坐标系 $oxyz$（为书写方便，省略上标“a”）之间的转换关系。

关机点惯性直角坐标系 $kx_Ay_Az_A$ 定义如下：主动段终点在惯性球壳上的投影 k 为坐标系原点；ky_A 轴为过 k 点的地心矢径；kx_A 轴位于主动段弹道平面内，垂直于 ky_A 轴，且指向射击方向；而 kz_A 轴则与轴 ky_A、kx_A 构成右手直角坐标系（图 10 - 1）。

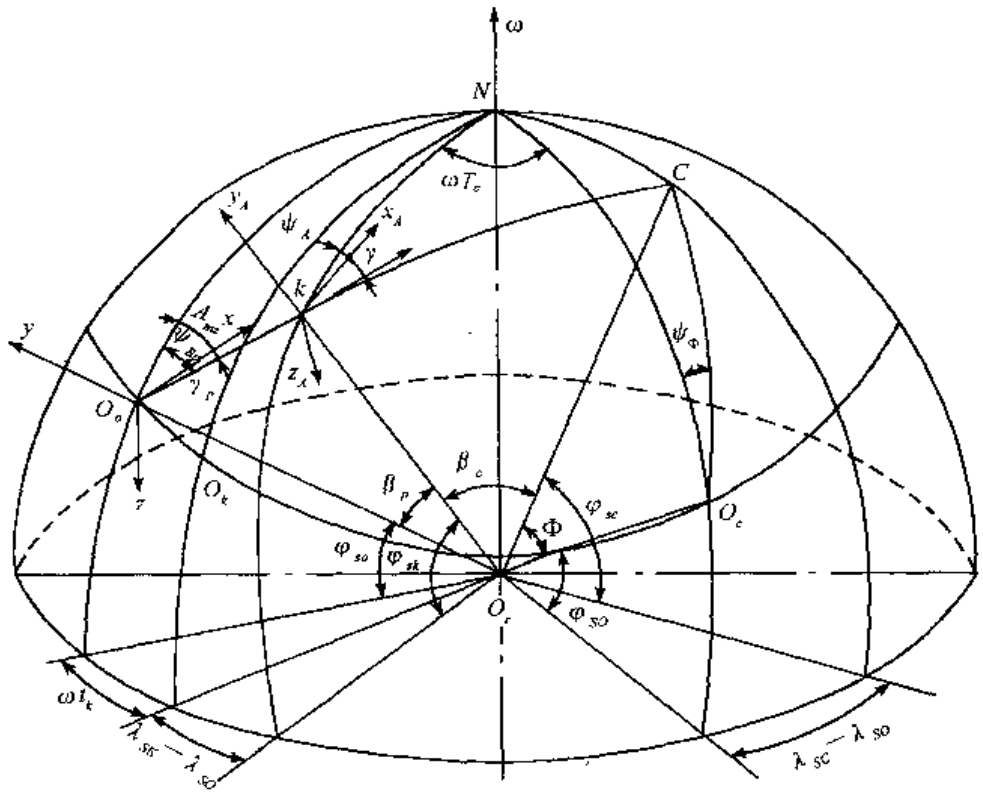


图 10 - 1

关机点惯性坐标系 $kx_Ay_Az_A$ 与发射点惯性坐标系 $oxyz$ 间的几何关系由角 β_p 和 γ_p 确定（图 10 - 2）。β_p 即为主动段关机点射程角，而 γ_p 则为主动段弹道平面与射面 oxy 的夹角，称为弹道偏角。显然，β_p、γ_p 角即表示因主动段运动而引起的关机点矢径的偏斜。在已知导弹主动段终点运动参数的情况下，由图 10 - 2 不难求得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

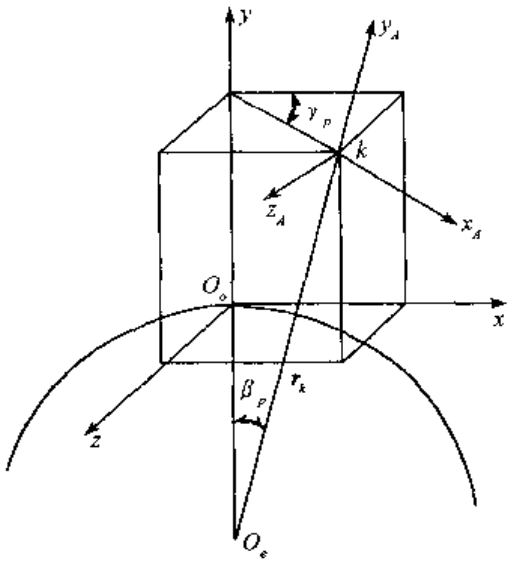


图 10 – 2

$$\begin{cases} \gamma_p = \sin^{-1}\dfrac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} & (|\gamma_p| \leqslant \dfrac{\pi}{2}) \\ \beta_p = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}}{r_k} & (|\beta_p| \leqslant \dfrac{\pi}{2}) \\ r_k = \sqrt{x_k^2 + (y_k + R)^2 + z_k^2} \end{cases} \tag{10 – 1.4}$$

此外，由图 10 – 2 看出，坐标系 $kx_Ay_Az_A$ 可由坐标系 $oxyz$ 经过两次旋转后得到。两坐标系间的方向余弦矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_p\cos\beta_p & -\sin\beta_p & -\sin\gamma_p\cos\beta_p \\ \cos\gamma_p\sin\beta_p & \cos\beta_p & \sin\gamma_p\sin\beta_p \\ -\sin\gamma_p & 0 & \cos\gamma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{10 – 1.5}$$

如果导弹主动段关机点绝对速度 $\boldsymbol{V}_k$ 在发射点惯性坐标系各轴上的分量为 V_{ik}（$i = x, y, z$），那么利用(10 – 1.5) 式便可求得导弹相对关机点惯性坐标系的速度分量：

$$\begin{bmatrix} V_{xA} \\ V_{yA} \\ V_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_p\cos\beta_p & -\sin\beta_p & -\sin\gamma_p\cos\beta_p \\ \cos\gamma_p\sin\beta_p & \cos\beta_p & \sin\gamma_p\sin\beta_p \\ -\sin\gamma_p & 0 & \cos\gamma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xk} \\ V_{yk} \\ V_{zk} \end{bmatrix} \tag{10 – 1.6}$$

因此，关机点绝对速度矢 $\boldsymbol{V}_k$ 的大小及其与当地水平面的夹角 Θ_A 分别为

$$V_A = V_k = (V_{xA}^2 + V_{yA}^2 + V_{zA}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{10 – 1.7}$$

和

$$\Theta_A = \sin^{-1}\frac{V_{yA}}{V_A} \tag{10 – 1.8}$$

或

$$\Theta_A = \cos^{-1}\frac{\sqrt{V_{xA}^2 + V_{zA}^2}}{V_A} \qquad (\Theta_k \leqslant \frac{\pi}{2}) \tag{10 – 1.9}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

而 $V_A(V_k)$ 相对主动段弹道平面的偏角则为

$$\gamma_A = \sin^{-1}\frac{V_{zA}}{\sqrt{V_{xA}^2 + V_{zA}^2}} \tag{10-1.10}$$

2、计算被动段射程角及飞行时间 T_c

由椭圆弹道理论知，导弹被动段射程角 β_c 为(参见图 9-9)

$$\beta_c = \beta_\beta + \beta_1 \tag{10-1.11}$$

其中

$$\begin{cases} \beta_\beta = \dfrac{\beta_c}{2} = \cos^{-1}\left[\dfrac{1}{e}\left(1 - \dfrac{P}{r_k}\right)\right] & \left(0 \leqslant \beta_\beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \beta_1 = \cos^{-1}\left[\dfrac{1}{e}\left(1 - \dfrac{P}{R}\right)\right] & (0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi) \end{cases} \tag{10-1.12}$$

式中 β_β 为导弹自由段射程角的一半，而 β_1 为弹道远地点矢径 r_a 与落地点矢径 r_c 间的夹角(图 9-9)。

根据(9-4.32)式，被动段飞行时间 T_c 可表为

$$T_c = \frac{1}{n}[(E_c - E_k) - e(\sin E_c - \sin E_k)] \tag{10-1.13}$$

因为

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \frac{P^2}{1-e^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{r_k V_k \cos\Theta_k}$$

令

$$c = r_k V_k \cos\Theta_k \tag{10-1.14}$$

于是

$$\frac{1}{n} = \frac{P^2}{c(1-e^2)}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \tag{10-1.15}$$

将由图 9-15 所得关系式

$$E_k = \pi - E'_k$$
$$f_k = \pi - \beta_\beta$$

代入(9-4.26)式，则有

$$c\,\mathrm{tg}\frac{E'_k}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,c\,\mathrm{tg}\frac{\beta_\beta}{2}$$

即

$$\mathrm{tg}\frac{E'_k}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{\beta_\beta}{2}$$

若令

$$Q_\beta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{\beta_\beta}{2} \tag{10-1.16}$$

则

$$E'_k = 2\mathrm{tg}^{-1}Q_\beta$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

因此

$$E_k = \pi - 2\mathrm{tg}^{-1} Q_\beta \tag{10-1.17}$$

同理

$$\begin{cases} E_c = \pi + 2\mathrm{tg}^{-1} Q_\beta \\ Q_1 = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta_1}{2} \end{cases} \tag{10-1.18}$$

将关系式 $\cos\beta_\beta = \cos\dfrac{\beta_e}{2}$ 代入(9-4.34),则有

$$\cos E_k = \frac{e - \cos\beta_\beta}{1 - e\cos\beta_\beta} \tag{10-1.19}$$

于是

$$\begin{cases} \sin E_k = \sqrt{1-\cos^2 E_k} = \dfrac{\sin\beta_\beta}{1-e\cos\beta_\beta}\sqrt{1-e^2} \\ \sin E_c = \dfrac{-\sin\beta_1}{1-e\cos\beta_1}\sqrt{1-e^2} \end{cases} \tag{10-1.20}$$

将(10-1.15)式及(10-1.17)~(10-1.20)式代入式(10-1.13),即得导弹被动段飞行时间 T_c,即

$$T_c = \frac{P^2 A}{c(1-e^2)} \tag{10-1.21}$$

其中

$$A = \frac{e\sin\beta_\beta}{1-e\cos\beta_\beta} + \frac{e\sin\beta_1}{1-e\cos\beta_1} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{tg}^{-1} Q_1 + \mathrm{tg}^{-1} Q_\beta) \tag{10-1.22}$$

3. 确定关机点在惯性球壳上投影点 k 的经纬度

由图 10-3 看出,在球面三角形 NO_0k 中

$$\angle O_0 Nk = \omega t_k + \lambda_{sk} - \lambda_{s0}$$
$$\angle NO_0 k = \psi_{\beta p} = A_{mz} + \gamma_p$$
$$\angle O_0 kN = 180^\circ - \psi_A$$

根据球面三角形公式可得

$$\sin\varphi_{sk} = \cos\beta_p \sin\varphi_{s0} + \cos\varphi_{s0}\sin\beta_p\cos\psi_{\beta p} \tag{10-1.23}$$

$$\sin(\lambda_{sk} - \lambda_{s0} + \omega t_k) = \frac{\sin\beta_p \sin\psi_{\beta p}}{\cos\varphi_{sk}} \tag{10-1.24}$$

$$\cos(\lambda_{sk} - \lambda_{s0} + \omega t_k) = \frac{\cos\beta_p - \sin\varphi_{s0}\sin\varphi_{sk}}{\cos\varphi_{s0}\cos\varphi_{sk}} \tag{10-1.25}$$

主动段惯性空间弹道平面与关机点子午面的夹角(即被动段初始瞄准方位角)ψ_A 为

$$\begin{cases} \sin\psi_A = \dfrac{\cos\varphi_{s0}\sin\psi_{\beta p}}{\cos\varphi_{sk}} \\ \cos\psi_A = \dfrac{\sin\varphi_{sk}\cos\beta_p - \sin\varphi_{s0}}{\cos\varphi_{sk}\sin\beta_p} \end{cases} \tag{10-1.26}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

式中 λ_{sk}、φ_{sk} 为主动段终点在地球表面上的投影的经度和纬度；$\psi_{\beta p}$ 为主动段终点在惯性球壳上的投影对发射点的球面方位角。

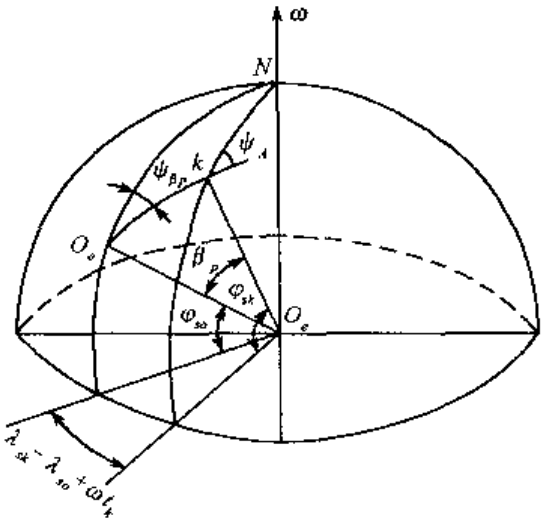


图 10 - 3

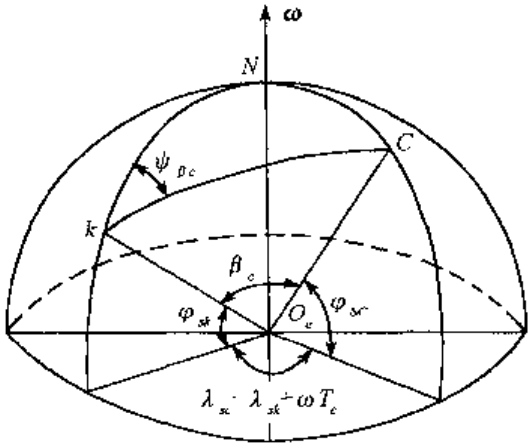


图 10 - 4

4. 确定落点的经度和纬度

由图 10 - 4 可见，在球面三角形 NkC 中，由于

$$\angle kNC = \omega T_c + \lambda_{sc} - \lambda_{sk}$$

$$\angle NkC = \psi_{\beta c} = \psi_A + \gamma_A$$

故由球面三角形公式可求得落点经纬度

$$\begin{cases} \sin(\lambda_{sc} - \lambda_{sk} + \omega T_c) = \sin\beta_c \sin\psi_{\beta c} / \cos\varphi_{sc} \\ \sin\varphi_{sc} = \sin\varphi_{sk}\cos\beta_c + \cos\psi_{\beta c}\cos\varphi_{sk}\sin\beta_c \end{cases} \tag{10-1.27}$$

式中 λ_{sc}、φ_{sc} 分别为落点经度和纬度；β_c 为惯性球壳上被动段射程角；$\psi_{\beta c}$ 为被动段惯性弹道平面与关机点在惯性球壳上的投影点的子午面间的二面角。

5. 射程偏差及横向偏差的计算

如前所述，在惯性球壳上对应于地心角 Φ 的大圆 $\overset{\frown}{O_cC}$ 弧即为所求的射程 L，而弧长 $\overset{\frown}{O_cC}$ 与过 O_c 点子午线的夹角 ψ_Φ，即为落点 C 对发射点 O_c 的球面方位角(图 10 - 5)。

在球面三角形 O_cNC 中，由于

$$\angle NO_cC = \psi_\Phi$$

$$\angle CNO_c = \lambda_{sc} - \lambda_{so}$$

$$\overset{\frown}{O_cC} = \Phi$$

$$\overset{\frown}{NO_c} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{so}$$

因此，由球面三角形公式可求得射程角和方位角

$$\begin{cases} \cos\Phi = \sin\varphi_{sc}\sin\varphi_{so} + \cos\varphi_{sc}\cos\varphi_{so}\cos(\lambda_{sc} - \lambda_{so}) \\ \sin\psi_\Phi = \cos\varphi_{sc}\sin(\lambda_{sc} - \lambda_{so}) / \sin\Phi \\ \cos\psi_\Phi = (\sin\varphi_{sc} - \cos\Phi\sin\varphi_{so}) / \sin\Phi\cos\varphi_{so} \end{cases} \tag{10-1.28}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

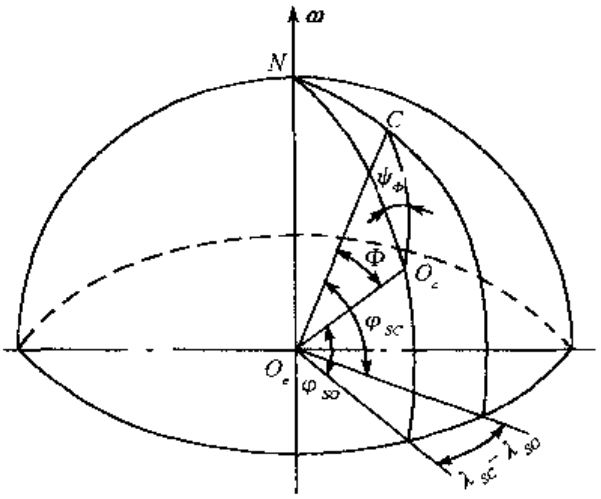


图 10－5

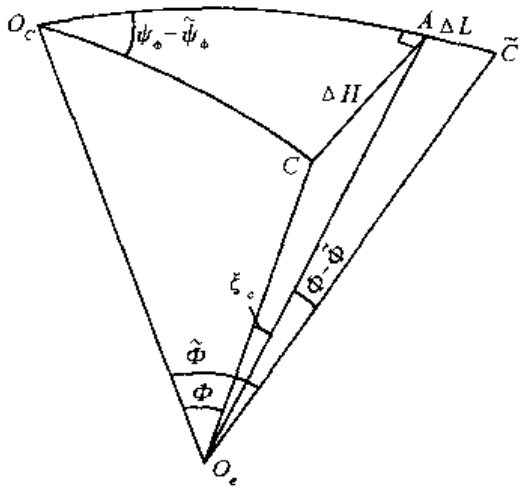


图 10－6

一般情况下，导弹实际落点 C 与目标点 $\tilde{C}$ 不重合，这就必将产生射程偏差和横向偏差（图 10－6）。过 C 点作垂直于大圆弧 $\overset{\frown}{O_c\tilde{C}}$ 的弧长 $\overset{\frown}{CA}$，则 $\overset{\frown}{CA}$ 的长度即为横向偏差 ΔH，而 $\overset{\frown}{A\tilde{C}}$ 的长度则为射程偏差 ΔL。若 ΔH 对应的地心角为 ζ_c，标准射程角为 $\tilde{\Phi}$ 时，则横向偏差及射程偏差为

$$\begin{cases}\Delta H = R\zeta_c \\ \Delta L = R(\Phi - \tilde{\Phi})\end{cases} \tag{10－1.29}$$

在球面三角形 O_cCA 中，因 $\overset{\frown}{CA} = \zeta_c$，$\overset{\frown}{O_cC} = \Phi$，$\angle \tilde{C}O_cC = \psi_\Phi - \tilde{\psi}_\Phi$，则由球面三角形正弦定理可得

$$\sin\zeta_c = \sin\Phi\sin(\psi_\Phi - \tilde{\psi}_\Phi)$$

在一阶近似条件下

$$\sin\zeta_c \approx \zeta_c$$

所以

$$\Delta H = R\sin\Phi\sin(\psi_\Phi - \tilde{\psi}_\Phi) \tag{10－1.30}$$

式中 $\tilde{\psi}_\Phi$ 为目标点 $\tilde{C}$ 对发射点 O_c 的球面方位角。

§10.2 考虑地球旋转时的误差系数

第九章中，我们已导出了导弹的射程误差系数和横向误差系数计算公式，但这些误差系数仅是对不旋转地球上的落点 $\tilde{C}$ 来说的。毫无疑问，对绝对弹道而言，这些系数不管射程角在什么范围内均是适用的。但用主动段终点的相对参数代入计算，其结果对考虑地球旋转时的相对落点而言，必定存在有偏差。为说明这一问题，现举一特例分析如下：

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

导弹在地球为圆球体且不考虑其旋转时以相对参数描述的运动为一平面运动，其运动轨道位于该平面内。设 $\tilde{C}_1$、$\tilde{C}_2$ 同为主动段终点 k 因运动参数有区别所形成的两落点，$\overset{\frown}{k\tilde{C}_1}$ 对应于近程导弹的射程，$\overset{\frown}{k\tilde{C}_2}$ 对应于远程导弹的射程，且设 $\tilde{C}_1$、$\tilde{C}_2$ 位于同一平行圈上（图 10－7）。在考虑地球旋转时，k 点有因地球旋转产生的牵连速度存在，将使绝对速度偏离不考虑地球旋转时的射面。为便于分析，设绝对落点 C_1^A、C_2^A 与 $\tilde{C}_1$、$\tilde{C}_2$ 位于同一平行圈上。由于一般 $\beta^A < 180°$，故顺绝对速度方向看去，$\tilde{C}_1$、$\tilde{C}_2$ 分别在绝对落点 C_1^A、C_2^A 的左方。对应于 C_1^A、C_2^A 时的导弹被动段飞行时间分别为 T_{c1}、T_{c2}，显然 T_{c2} 远大于 T_{c1}，C_1^A、C_2^A 分别沿 $\boldsymbol{\omega}$ 相反方向转动 ωT_{c1}、ωT_{c2} 角得相对落点 C_1、C_2。此时发现对近程导弹而言，C_1 回到 $\tilde{C}_1$ 的近旁，因此考虑地球旋转的相对弹道与不考虑地球旋转时的弹道相差不大，因而尚可利用不考虑地球旋转的误差系数来求相对落点的偏差。但对远程导弹而言，C_2 较之 C_2^A 偏离 $\tilde{C}_2$ 更远，这说明考虑地球旋转的相对弹道与不考虑地球旋转的弹道差别甚大，因此这就有必要来导出考虑地球旋转时的误差系数。

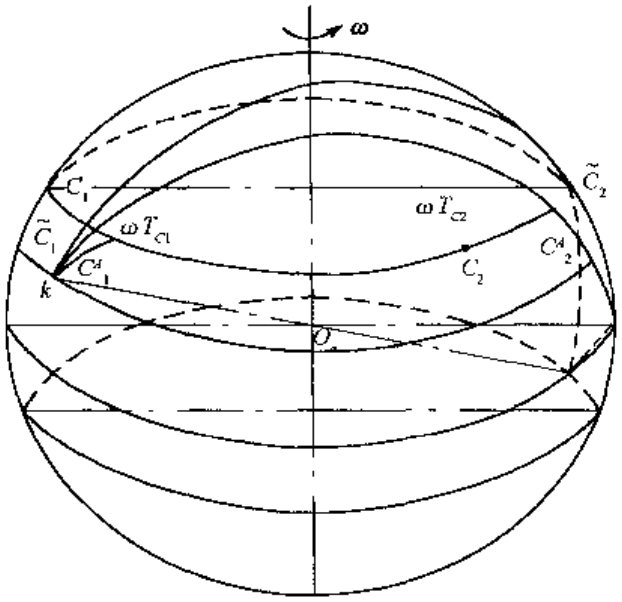


图 10－7

由于地球旋转后的相对弹道为非平面弹道，因此主动段终点参数变化造成的落点偏差，即有射程偏差，又有横向偏差，同时还存在两者的交链影响量，而后者正是与不考虑地球旋转时的误差系数之不同点。

应用运动学方法求算地球旋转时的射程误差系数和横向误差系数，因其解析式推导过程甚为繁杂，为节省篇幅，故这里将不涉及其推导细节，而只说明推导思路、方法和结果。

为获得地球旋转条件下的误差系数，我们仍然采用通过惯性球壳上的几何关系将椭圆弹道射程公式和旋转地球上的射程公式联系起来的方法加以研究。首先用相对关机点惯性坐标系的参数代替相对发射点惯性坐标系的参数，即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{aligned} L &= L(V_{xk}, V_{yk}, V_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k) \\ &= L(V_A, \Theta_A, r_A, \beta_p, \gamma_p, \gamma_A, t_k) \end{aligned} \tag{10-2.1}$$

这样,对后者的偏导数就可用对前者的偏导数来表示。

例如,以对 V_{xk} 的射程偏导数为例,可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{xk}} = &\frac{\partial L}{\partial V_A}\frac{\partial V_A}{\partial V_{xk}} + \frac{\partial L}{\partial \Theta_A}\frac{\partial \Theta_A}{\partial V_{xk}} + \frac{\partial L}{\partial r_A}\frac{\partial r_A}{\partial V_{xk}} + \frac{\partial L}{\partial \beta_p}\frac{\partial \beta_p}{\partial V_{xk}} + \frac{\partial L}{\partial \gamma_p}\frac{\partial \gamma_p}{\partial V_{xk}} \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \gamma_A}\frac{\partial \gamma_A}{\partial V_{xk}} + \frac{\partial L}{\partial t_k}\frac{\partial t_k}{\partial V_{xk}} \end{aligned} \tag{10-2.2}$$

用同样方法也可导出$\frac{\partial L}{\partial i}(i = V_{yk}, V_{zk}, x_k, y_k, z_k, t_k)$关系式。将它们写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial V_{xk}} \\ \frac{\partial L}{\partial V_{yk}} \\ \frac{\partial L}{\partial V_{zk}} \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} \\ \frac{\partial L}{\partial y_k} \\ \frac{\partial L}{\partial z_k} \\ \frac{\partial L}{\partial t_k} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial V_A} \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_A} \\ \frac{\partial L}{\partial r_A} \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma_A} \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_p} \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma_p} \\ \frac{\partial L}{\partial t_k} \end{bmatrix} \tag{10-2.3}$$

其中

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & 0 & n_{41} & 0 & 0 & 0 \\ n_{12} & n_{22} & 0 & n_{42} & 0 & 0 & 0 \\ n_{13} & n_{23} & 0 & n_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{24} & n_{34} & n_{44} & n_{54} & n_{64} & 0 \\ 0 & n_{25} & n_{35} & n_{45} & n_{55} & n_{65} & 0 \\ 0 & n_{26} & n_{36} & n_{46} & n_{56} & n_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10-2.4}$$

式中 n_{ij} 为相应的偏导数,其推导方法举例如下:

由于

$$V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

故 V 对 $V_i(i = x_k, y_k, z_k)$ 的偏导数为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial V_{xk}} = \dfrac{V_{xk}}{V_k} = n_{11} \\ \dfrac{\partial V}{\partial V_{yk}} = \dfrac{V_{yk}}{V_k} = n_{12} \\ \dfrac{\partial V}{\partial V_{zk}} = \dfrac{V_{zk}}{V_k} = n_{13} \end{cases} \tag{10-2.5}$$

又因为

$$\Theta_A = \sin^{-1}(V_{yA}/V_k)$$

$$V_{yA} = V_{xk}\cos\gamma_p\cos\beta_p + V_{yk}\cos\beta_p + V_{zk}\sin\gamma_p\sin\beta_p$$

所以 Θ_A 对 $V_i(i = x_k, y_k, z_k)$ 的偏导数为

$$\begin{cases} n_{21} = \dfrac{\partial\Theta_A}{\partial V_{xk}} = \mathrm{tg}\Theta_A\left(\dfrac{\cos\gamma_p\sin\beta_p}{V_{yA}} - \dfrac{V_{xk}}{V_k^2}\right) = \mathrm{tg}\Theta_A\left(\dfrac{a_{21}}{V_{yA}} - \dfrac{n_{11}}{V_k}\right) \\ n_{22} = \dfrac{\partial\Theta_A}{\partial V_{yk}} = \mathrm{tg}\Theta_A\left(\dfrac{a_{22}}{V_{yA}} - \dfrac{n_{12}}{V_k}\right) \\ n_{23} = \dfrac{\partial\Theta_A}{\partial V_{zk}} = \mathrm{tg}\Theta_A\left(\dfrac{a_{23}}{V_{yA}} - \dfrac{n_{13}}{V_k}\right) \\ a_{21} = \cos\gamma_p\sin\beta_p \\ a_{22} = \cos\beta_p \\ a_{23} = \sin\gamma_p\sin\beta_p \end{cases} \tag{10-2.6}$$

应用类似于式(10－2.5)及(10－2.6)的推导方法,可求得其它偏导数 n_{ij}(参见附录5)。由式(10－1.3)～(10－1.28)可以看出,射程通过一系列中间变量与 V_A、Θ_A、r_A、γ_p、β_p、γ_A、t_k 相联系,即有关系式

$$L = R\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{sc} \\ \widetilde{\lambda}_{sc} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta_c \\ T_c \\ \psi_{pc} \\ \varphi_{sk} \\ \widetilde{\lambda}_{sk} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_A \\ \Theta_A \\ r_A \\ \gamma_A \\ \beta_p \\ \gamma_p \\ t_k \end{bmatrix}$$

式中 $\widetilde{\lambda_{sc}} = \lambda_{sc} - \lambda_{s0}$,$\widetilde{\lambda_{sk}} = \lambda_{sk} - \lambda_{s0}$。因此,根据上述函数关系式就不难导出各射程误差系数公式,其矩阵式为

$$\left[\frac{\partial L}{\partial V_A} \quad \frac{\partial L}{\partial\Theta_A} \quad \frac{\partial L}{\partial r_A} \quad \frac{\partial L}{\partial\gamma_A} \quad \frac{\partial L}{\partial\beta_p} \quad \frac{\partial L}{\partial\gamma_p} \quad \frac{\partial L}{\partial t_k}\right]^T = D \cdot C\begin{bmatrix} R\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{sc}} \\ R\dfrac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}} \end{bmatrix} \tag{10-2.7}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial\beta_c}{\partial V_A} & \frac{\partial T_c}{\partial V_A} & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial\beta_c}{\partial\Theta_A} & \frac{\partial T_c}{\partial\Theta_A} & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial\beta_c}{\partial r_A} & \frac{\partial T_c}{\partial r_A} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\partial\psi_A}{\partial\varphi_{sk}}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\beta_p} & \frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\beta_p} & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sk}}{\partial\beta_p}+\frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sk}}{\partial\varphi_{sk}}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\beta_p}\\
0 & 0 & \frac{\partial\psi_A}{\partial\psi_{\beta p}}+\frac{\partial\psi_A}{\partial\varphi_{sk}}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\psi_{\beta p}} & \frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\psi_{\beta p}} & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sk}}{\partial\psi_{\beta p}}+\frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sk}}{\partial\varphi_{sk}}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\psi_{\beta p}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sk}}{\partial t_k}
\end{bmatrix} \tag{10-2.8}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\beta_c} & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\beta_c}+\frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\varphi_{sc}}\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\beta_c}\\
0 & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial T_c}\\
\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\psi_{\beta c}} & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\varphi_{sc}}\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\psi_{\beta c}}+\frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\psi_{\beta c}}\\
\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\varphi_{sk}} & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\varphi_{sc}}\frac{\partial\varphi_{sc}}{\partial\varphi_{sk}}\\
0 & \frac{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}{\partial\lambda_{sk}}
\end{bmatrix} \tag{10-2.9}$$

用类似方法也可求得各横向误差系数

$$\left[\frac{\partial H}{\partial V_A}\quad\frac{\partial H}{\partial\Theta_A}\quad\frac{\partial H}{\partial r_A}\quad\frac{\partial H}{\partial\gamma_A}\quad\frac{\partial H}{\partial\beta_p}\quad\frac{\partial H}{\partial\gamma_p}\quad\frac{\partial H}{\partial t_k}\right]^T=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}
R\sin\Phi\left(\frac{\partial\psi_\Phi}{\partial\varphi_{sc}}+\frac{\partial\psi_\Phi}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi_\Phi}{\partial\varphi_{sc}}\right)\\
R\sin\Phi\left(\frac{\partial\psi_\Phi}{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}+\frac{\partial\psi_\Phi}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi_\Phi}{\partial\widetilde{\lambda}_{sc}}\right)
\end{bmatrix} \tag{10-2.10}$$

矩阵 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{C}$ 中各元素的计算公式见附录 5。

§10.3 考虑地球扁率时的被动段弹道计算

前面所讨论的考虑和不考虑地球旋转时的导弹被动段弹道计算式，均是在地球为圆球体条件下导出的。实际上，地球不是规则的圆球体，而是一个相当复杂的近似椭球体。由于圆球地球体与正常椭球体的不吻合，因而对远程导弹的弹道计算将会产生较大的误差。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为估量地球扁率对弹道的影响和便于求得运动微分方程的解析解，我们做如下假设：

(1) 地球为一不自转的质量分布均匀的正常椭球体；

(2) 再入段气动阻力等于零。

在上述假设条件下，地球为正常椭球体时的引力位及球外任一点的引力加速度 $\boldsymbol{g}$ 可表为

$$\begin{cases} U = \dfrac{fM}{r}\left[1 + \dfrac{1}{2}J_2\left(\dfrac{a}{r}\right)^2(1 - 3\sin^2\varphi_s)\right] \\ \boldsymbol{g} = g_r\boldsymbol{r}^0 + g_\omega\boldsymbol{\omega}^0 \end{cases} \tag{10-3.1}$$

其中，φ_s 为地心纬度，a 为地球椭球体长半轴，$\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{\omega}^0$ 分别为 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{\omega}$ 的单位矢量。g_r、g_ω 分别为 $\boldsymbol{g}$ 在地心矢径 $\boldsymbol{r}$ 和地球自转轴 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上的分量，其表达式为

$$\begin{cases} g_r = -\dfrac{fM}{r^2}\left[1 + J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2(1 - 5\sin^2\varphi_s)\right] \\ g_\omega = -2\dfrac{fM}{r^2}J\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sin\varphi_s \end{cases} \tag{10-3.2}$$

J 为地球扁率常数。

由(10-3.1)和(10-3.2)式看出，若不考虑含 J 项，即得地球为圆球时的引力位及引力加速度。显然，J 项实为地球扁率对圆球引力位及引力加速度的修正，它说明考虑地球扁率时的引力加速度 $\boldsymbol{g}$ 不仅有 $\boldsymbol{r}$ 方向的变化，同时还有 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上的变化。因而在此情况下，弹道参数在 $\boldsymbol{r}$ 及 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上均将产生偏差。另外，地球扁率的存在还将因几何形状的变化而引起导弹落点偏差。弹道学中将前者称为动力学的影响，而后者则称为几何学的影响，在讨论地球扁率对导弹运动影响时，二者均应予以考虑。

10.3.1 动力学的影响

1. 绝对非正交坐标系 $kx_1y_1z_1$

为便于建立考虑地球扁率时的导弹被动段运动微分方程，我们引入一绝对非正交坐标系的概念。

绝对非正交坐标系原点取为主动段关机点 k；ky_1 轴与过 k 点的地心矢径 $\boldsymbol{r}$ 一致；kx_1 轴位于由关机点地心矢径 $\boldsymbol{r}_k$ 和绝对速度 $\boldsymbol{V}_k$ 所决定的初始弹道平面内，垂直于 ky_1 轴，且指向导弹飞行方向；而 kz_1 轴则与地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，但指向相反(图 10-8)。

假设有一惯性球壳，地心为其球心，关机点地心距离 r_k 为其半径。显然，关机点 k 位于该惯性球壳上，kx_1 轴必与初始弹道平面和惯性球壳所交大圆弧 $\overset{\frown}{kD}$ 相切于 k 点。$\overset{\frown}{kD}$ 与过 k 点的子午大圆弧 $\overset{\frown}{kN}$ 之夹角 α_k，即为导弹被动段飞行方位角。根据定义和图 10-9 可得如下计算式

$$\begin{cases} u_k = (V_{xnk}^2 + V_{ynk}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_k = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\dfrac{V_{xnk}}{u_k}\right) & V_{xnk} \geqslant 0 \\ \pi - \sin^{-1}\left(\dfrac{V_{xnk}}{u_k}\right) & V_{xnk} < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{10-3.3}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

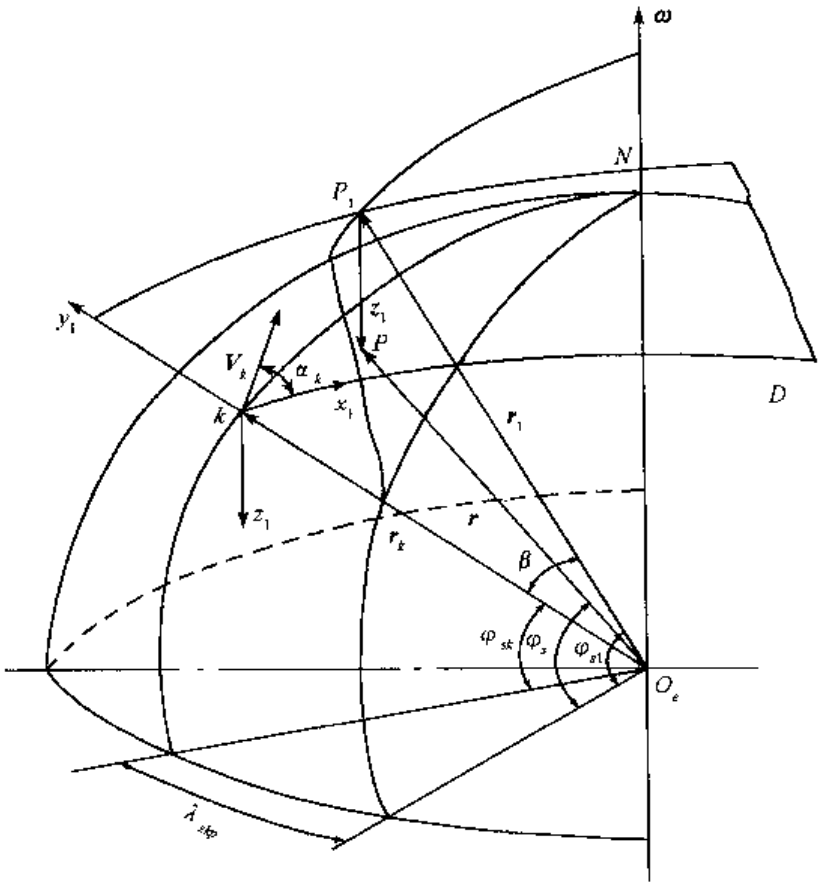


图 10－8

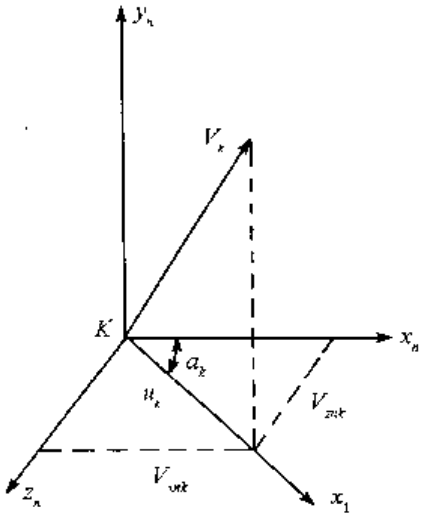


图 10－9

式中，V_{xnk}、V_{ynk}、V_{znk} 为主动段终点绝对速度 $\boldsymbol{V}_k$ 在北东坐标系(见附录 2)各坐标轴上的分量，u_k 为 $\boldsymbol{V}_k$ 在过 k 点的切平面和初始弹道平面之交线方向的速度分量。

由(10－3.2)第一式可知，如果地球为圆球体(即 $J=0$)，那么导弹被动段弹道是一与初始弹道平面重合、地心为其中一个焦点的平面椭圆弹道的一部分。如果地球为正常椭球

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

体($J \neq 0$),计算表明,J 是 10^{-3} 量级的小量,因此在 g_r 作用下的实际弹道将在上述平面椭圆弹道附近摄动。若令 $g_\omega = 0$,则引力 g_r 仍为有心力,因而其弹道仍为平面椭圆弹道,导弹在该平面内运动时仍将遵循着动量矩守恒和机械能守恒定律。这样,我们完全可将导弹的被动段运动分解为初始弹道平面内的运动和沿 z_1 轴方向上的运动加以研究。

为此,将导弹任一点 P 处的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 写成过 P 点与 z_1 轴平行面交于初始弹道平面 P_1 点的矢量 $\boldsymbol{z}_1$ 及 P_1 点地心矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 的矢量和

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{z}_1 \tag{10-3.4}$$

若 φ_s 及 φ_{s1} 分别为 P 和 P_1 的地心纬度,由图 10-8 可知,那么两者之差可表为

$$\delta = \varphi_s - \varphi_{s1} \tag{10-3.5}$$

2. 运动微分方程的建立

将导弹被动段任一位置时的地球引力矢 $\boldsymbol{g}$ 用在 $\boldsymbol{r}_1$ 及 z_1 方向上的分量表示,即

$$\boldsymbol{g} = g_{r1}\boldsymbol{r}_1^0 + g_{z_1}\boldsymbol{z}_1^0 \tag{10-3.6}$$

$\boldsymbol{r}_1^0$、$\boldsymbol{z}_1^0$ 分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 及 z_1 的单位矢。

将由(10-3.4)式所得关系式

$$\boldsymbol{r}^0 = \frac{r_1}{r}\boldsymbol{r}_1^0 + \frac{z_1}{r}\boldsymbol{z}_1^0 \tag{10-3.7}$$

代入(10-3.1)第二式,有

$$\boldsymbol{g} = g_r\frac{r_1}{r}\boldsymbol{r}_1^0 + g_r\frac{z_1}{r}\boldsymbol{z}_1^0 + g_\omega\boldsymbol{\omega}^0$$

$\boldsymbol{r}^0$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。

因

$$\boldsymbol{z}_1^0 = -\boldsymbol{\omega}^0$$

故

$$\boldsymbol{g} = \frac{r_1}{r}g_r\boldsymbol{r}_1^0 + \left(\frac{z_1}{r}g_r - g_\omega\right)\boldsymbol{z}_1^0 \tag{10-3.8}$$

比较(10-3.8)与(10-3.6)式,即得 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{r}_1^0$ 及 $\boldsymbol{z}_1^0$ 方向上的分量

$$\begin{cases} g_{r1} = g_r\dfrac{r_1}{r} \\ g_{z_1} = g_r\dfrac{z_1}{r} - g_\omega \end{cases} \tag{10-3.9}$$

(1) 初始弹道平面内的运动方程

由于导弹在初始弹道平面内的被动段飞行,仍属于有心力场内的运动,故由理论力学知识可得单位质量导弹的运动微分方程和动量矩方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} - r_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{r1} \\ r_1^2\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = h = const \\ h = u_k r_k \end{cases} \tag{10-3.10}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

式中 h 为动量矩，常值；β 为从 r_k 到 r_1 的地心角，即射程角。

为求解这组微分方程，首先须消去自变量。因此，当令

$$\eta = \frac{1}{r_1} \tag{10-3.11}$$

时，则方程组(10-3.10)第二方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = h\eta^2 \tag{10-3.12}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{r_1^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r_1} = -\frac{1}{r_1^2} = -\eta^2$$

故

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\beta}\dot{\beta} = -h\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\beta}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}_1}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\eta^2 h^2 \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\beta^2} \tag{10-3.13}$$

将(10-3.12)及(10-3.13)代入(10-3.10)第一式，可得以射程角 β 为自变量的初始弹道平面内的导弹被动段运动微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\beta^2} + \eta = -\dfrac{g_{r1}}{h^2\eta^2} \\ h = u_k r_k \end{cases} \tag{10-3.14}$$

该方程式为二阶非齐次线性微分方程式，在给定初始条件下，通常是可求解的。

(2) z_1 轴方向的运动方程

根据牛顿第二定律，单位质量导弹被动段飞行时，在引力 g_{z_1} 作用下的 z_1 轴方向的运动微分方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = g_r\frac{z_1}{r} - g_w \tag{10-3.15}$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2}$ 为导弹在 z_1 轴方向上的运动加速度。

为便于求解上述微分方程，亦进行变量置换以消去自变量 t。

令

$$\zeta = \frac{z_1}{r_1} \tag{10-3.16}$$

时，则

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\beta}\dot{\beta} = \dot{\beta}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\beta}r_1 + \zeta\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\beta}\right)$$

因为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{dr_1}{d\beta} = -\frac{1}{\eta^2}\frac{d\eta}{d\beta}$$

且顾及式(10 - 3.11)及(10 - 3.12),故有

$$\frac{dz_1}{dt} = h\left(\frac{d\zeta}{d\beta}\eta - \zeta\frac{d\eta}{d\beta}\right) \tag{10 - 3.17}$$

将(10 - 3.12)及(10 - 3.17)代入下式

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz_1}{dt}\right) = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{dz_1}{dt}\right)\dot{\beta}$$

可得

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \eta^2h^2\frac{d^2\zeta}{d\beta^2} - \eta^2h^2\zeta\frac{d^2\eta}{d\beta^2}$$

再将(10 - 3.14)第一式代入上式,并与(10 - 3.15)式进行比较,且顾及(10 - 3.9)第一关系式,即得以 β 为自变量的导弹被动段 z_1 方向的运动微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\zeta}{d\beta^2} + \zeta = -\dfrac{g_\omega}{\eta^2h^2}\\ h = u_kr_k\end{cases} \tag{10 - 3.18}$$

与(10 - 3.14)方程类似,该方程也为二阶非齐次线性微分方程,在给定初始条件下,同样可求得其解析解。

为求解微分方程(10 - 3.14)及(10 - 3.18),应将右函数中的 g_{r1} 及 g_ω 分别化为 η、ζ、β 的函数。根据(10 - 3.2)、(10 - 3.9)及(10 - 3.11)式,g_{r1} 及 g_ω 可写成

$$\begin{cases}g_{r1} = -\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^3\eta^3fM\left[1 + J\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2\eta^2a^2(1 - 5\sin^2\varphi_s)\right]\\ g_\omega = -2JfM\eta^4a^2\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^4\sin\varphi_s\end{cases} \tag{10 - 3.19}$$

为将(10 - 3.19)中的$\frac{r_1}{r}$、$\sin\varphi_s$ 变换成 η、ζ 及 β 的函数,在 ΔP_1PO_e 中(图 10 - 8),因 $\angle PP_1O_e = \frac{\pi}{2} - \varphi_{s1}$ 故根据三角形余弦公式有

$$r^2 = r_1^2 + z_1^2 - 2r_1z_1\sin\varphi_{s1}$$

等式两边同除 r_1^2,并开方

$$\frac{r_1}{r} = \left[1 + \zeta^2 - 2\zeta\sin\varphi_{s1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

将其展成幂级数,且略去 ζ^2 以上各高次项,可得近似式

$$\frac{r_1}{r} = 1 + \zeta\sin\varphi_{s1} \tag{10 - 3.20}$$

又由图 10 - 8 知

$$r_1\sin\varphi_{s1} = r\sin\varphi_s + z_1$$

或

$$\sin\varphi_s = \frac{r_1}{r}\sin\varphi_{s1} - \frac{z_1}{r} = \frac{r_1}{r}(\sin\varphi_{s1} - \zeta)$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将(10 - 3.20)代入上式,则有

$$\sin\varphi_s = (1 + \zeta\sin\varphi_{s1})(\sin\varphi_{s1} - \zeta) \tag{10 - 3.21}$$

在球面三角形 NkP_1' 中(图 10 - 10),因

$$\angle NkP_1' = \alpha_k$$

$$\widehat{kN} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{sk}$$

$$\widehat{P_1'N} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{s1}$$

$$\widehat{kP_1'} = \beta$$

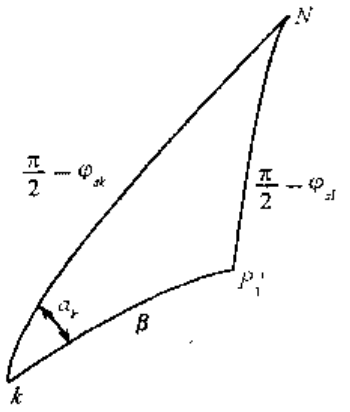


图 10 - 10

故由球面三角形公式可得

$$\sin\varphi_{s1} = \sin\varphi_{sk}\cos\beta + \cos\varphi_{sk}\sin\beta\cos\alpha_k$$

式中 φ_{sk} 为主动段终点 k 的地心纬度。从上式看出,$\sin\varphi_{s1}$ 是 β 的函数,若将其记为 $E(\beta)$,则

$$E(\beta) = \sin\varphi_{s1} = \sin\varphi_{sk}\cos\beta + \cos\varphi_{sk}\sin\beta\cos\alpha_k \tag{10 - 3.22}$$

代入(10 - 3.21)式有

$$\sin\varphi_s = [1 + \zeta E(\beta)][E(\beta) - \zeta] \tag{10 - 3.23}$$

将(10 - 3.20)及(10 - 3.23)式一并代入(10 - 3.19)式,且顾及 J 是一个小量和将 ζ 作为 J 的同阶小量,故略去它们的二阶以上各量时,可得

$$\begin{cases} g_{r1} = -fM\eta^2\{1 + 3\zeta E(\beta) + Ja^2\eta^2[1 - 5E^2(\beta)]\} \\ g_\omega = -2JfMa^2\eta^4 E(\beta) \end{cases} \tag{10 - 3.24}$$

再将上式分别代入(10 - 3.14)及(10 - 3.18)式,便得考虑地球扁率时导弹被动段运动微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{d\beta^2} + \eta = \dfrac{1}{P}\{1 + 3\zeta E(\beta) + Ja^2\eta^2[1 - 5E^2(\beta)]\} \\ \dfrac{d^2\zeta}{d\beta^2} + \zeta = 2J\dfrac{a^2}{P}\eta E(\beta) \\ dt = \dfrac{d\beta}{\eta^2 h} \end{cases} \tag{10 - 3.25}$$

式中,$P = r_k v_k\cos^2\Theta_k = \dfrac{h^2}{fM}$ 为椭圆弹道半通径。

3. 运动微分方程的解

由于 ζ 与 J 是同数量的,(10 - 3.25)第一方程等式右端大括号内的第二、三项也与 J 同量级,所以当其略去不计、视地球为匀质圆球体时导弹被动段初始弹道平面内的弹道微分方程为

$$\frac{d^2\eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{P} \tag{10 - 3.26}$$

式中 $\eta_0 = \dfrac{1}{r_0}$,r_0 为不考虑地球扁率时弹道上任一点的地心距离,它是射程 β 的函数。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

若 δ_η 记作地球扁率对弹道参数 η_0 产生的微小偏差，那么考虑地球扁率后的弹道参数 η 即可表为

$$\eta = \eta_0 + \delta\eta \tag{10-3.27}$$

将上式对 β 求导，且顾及(10-3.26)式，得

$$\frac{d^2\eta}{d\beta^2} + \eta = \frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta + \frac{1}{P}$$

上式代入(10-3.25)中第一式得

$$\frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \frac{1}{P}\{3\zeta E(\beta) + Ja^2\eta^2[1-5E^2(\beta)]\} \tag{10-3.28}$$

因此，(10-3.25)式进一步表成

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \dfrac{1}{P} \\ \dfrac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \dfrac{1}{P}\{3\zeta E(\beta) + Ja^2\eta^2[1-5E^2(\beta)]\} \\ \dfrac{d^2\zeta}{d\beta^2} + \zeta = 2J\dfrac{a^2}{P}\eta E(\beta) \\ \eta = \eta_0 + \delta\eta \\ dt = \dfrac{d\beta}{h\eta^2} \end{cases} \tag{10-3.29}$$

(1) 椭圆弹道方程的解

不考虑地球扁率时的导弹被动段弹道方程

$$\frac{d^2\eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{P} \tag{10-3.30}$$

为二阶线性非齐次微分方程，其解一定是二次曲线方程。为便于求解，若令

$$\eta_0' = \eta_0 - \frac{1}{P} \tag{10-3.31}$$

则(10-3.30)可变换成为二阶线性齐次微分方程

$$\frac{d^2\eta_0'}{d\beta^2} + \eta_0' = 0$$

这是一无阻尼自由振动微分方程，其通解为

$$\eta_0' = c_1\cos\beta + c_2\sin\beta$$

于是

$$\eta_0 = \frac{1}{P} + c_1\cos\beta + c_2\sin\beta \tag{10-3.32}$$

式中 c_1、c_2 为由主动段终点参数确定的积分常数。

当 $\beta = 0$ 时，$\eta_0(0) = \dfrac{1}{r_k}$，故由(10-3.32)式可得积分常数 c_1，即

$$c_1 = \frac{1}{r_k} - \frac{1}{P} \tag{10-3.33}$$

为求积分常数 c_2，可将(10-3.32)对 β 求导，得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{d\eta_0}{d\beta} = -c_1\sin\beta + c_2\cos\beta$$

当 $\beta = 0$ 时

$$c_2 = \left.\frac{d\eta_0}{d\beta}\right|_{\beta=0} \tag{10-3.34}$$

由于

$$\frac{d\eta}{d\beta} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{\dot\beta} = -\eta^2\dot r\frac{1}{\dot\beta}$$

于是

$$\left.\frac{d\eta_0}{d\beta}\right|_{\beta=0} = -\frac{\dot r_k}{h} = -\frac{V_{ynk}}{h}$$

故积分常数 c_2 即为

$$c_2 = -\frac{V_{ynk}}{h} \tag{10-3.35}$$

V_{ynk} 为主动段终点绝对速度 V_k 在北东坐标系之 y_n 轴上的分量。

将(10-3.33)及(10-3.35)代入(10-3.32)得

$$\eta_0 = \frac{1}{P} - \frac{1}{P}\left(1 - \frac{P}{r_k}\right)\cos\beta - \frac{V_{ynk}}{h}\sin\beta \tag{10-3.36}$$

令

$$P_k = 1 - \frac{P}{r_k}$$

$$Q = \frac{PV_{ynk}}{h}$$

$$e = \sqrt{P_k^2 + Q^2}$$

则

$$\begin{cases} P_k = e\cos\xi_0 \\ Q = e\sin\xi_0 \end{cases}$$

将上式代入(10-3.36)式,且注意到 $\eta_0 = \frac{1}{r_0}$,则有

$$r_0 = \frac{P}{1 - e\cos(\beta + \xi_0)} = \frac{P}{1 - e\cos\xi} \tag{10-3.37}$$

其中

$$\xi = \beta + \xi_0 \tag{10-3.38}$$

可见,(10-3.37)式与椭圆弹道方程式(9-1.8)形式基本一致,这是因为该式是在假设地球为匀质圆球条件下导出的。但不同之处在于:当 $\xi = 0$ 时,$r_0 = \frac{P}{1-e} = r_{omax}$,$\xi_0 = -\beta$。由此可知,$\xi$ 是由椭圆弹道远地点 a 至 P_1 点的地心角,顺时针为正,反之为负;而 ξ_0 是由远地点 a 至主动段终点 k 间的地心角,其值恒为负。至于射程角的定义,则仍与椭圆弹道理理论中的 β 角相同(10-11)。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

在椭圆弹道理论中，椭圆弹道方程式常表为

$$r = \frac{P}{1 + e\cos(\beta + \beta_0)}$$

的形式。其中 β_0 为由椭圆弹道近地点 p 至主动段终点 k 间的地心角，β 为由 k 点至任一点间的地心角。但这里导出的椭圆弹道方程，之所以采用(10 - 3.37)式的形式，则完全为了便于导出考虑地球扁率时导弹被动段弹道方程的解析解，特别是对飞行时间 T 的表示上尤为简单。

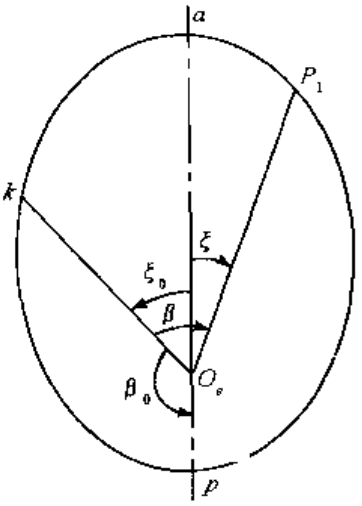


图 10 - 11

(2) 关于 ζ 方程的解

为便于求解，将方程组(10 - 3.29)第三式中的 $E(\beta)$ 化为 ξ 的函数。为此当用 $\xi - \xi_0$ 置换 $E(\beta)$ 中之 β 时，则由(10 - 3.22)式可得

$$E(\beta) = E(\xi - \xi_0) = E_s\sin\xi + E_c\cos\xi = F(\xi) \tag{10 - 3.39}$$

其中

$$\begin{cases} E_s = E(\frac{\pi}{2} - \xi_0) = \sin\varphi_{sk}\sin\xi_0 + \cos\varphi_{sk}\cos\xi_0\cos\alpha_k \\ E_c = E(-\xi_0) = \sin\varphi_{sk}\cos\xi_0 - \cos\varphi_{sk}\sin\xi_0\cos\alpha_k \end{cases} \tag{10 - 3.40}$$

因 $\eta = \eta_0 + \delta\eta$，在一阶近似条件下

$$\eta_0 \approx \eta = \frac{1}{P}(1 - e\cos\xi)$$

将此式与(10 - 3.40)式代入(10 - 3.29)第三式，经整理故得

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \zeta = J_a\Phi(\xi) \tag{10 - 3.41}$$

其中

$$\begin{cases} J_a = \dfrac{Ja^2}{P^2} \\ \Phi(\xi) = -eE_c + 2E_s\sin\xi + 2E_c\cos\xi - eE_s\sin2\xi - eE_c\cos2\xi \end{cases} \tag{10 - 3.42}$$

(10 - 3.41)式也是一个二阶常系数线性非齐次微分方程，其解算方法前面已介绍过。这里再介绍一种特殊的求解方法，这种方法的要点在于用相当简单的公式，从对应的齐次方程初始条件 $\bar\zeta(\xi_0) = 0$、$\bar\zeta'(\xi_0) = 1$ 的特解来定出原非齐次方程的满足初始条件的 $\bar\zeta(\xi_0) = \bar\zeta'(\xi_0) = 0$ 特解。下面具体地介绍方程(10 - 3.41)的求解方法。

方程(10 - 3.41)所对应的齐次方程

$$\frac{d^2\bar\zeta}{d\xi^2} + \bar\zeta = 0 \tag{10 - 3.43}$$

的通解为

$$\bar\zeta = c_1\cos\xi + c_2\sin\xi \tag{10 - 3.44}$$

根据初始条件：$\bar\zeta(\xi_0) = 0$、$\bar\zeta'(\xi_0) = 1$，可确定出常数 $c_1 = 0$、$c_2 = 1$，故有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\bar{\zeta} = \sin\xi$$

有了上述满足初始条件的通解，再联系(10－3.41)式右端函数，我们只需将 $\bar{\zeta}$ 的变量 ξ 换成$(\xi - x)$，则可按下式计算

$$\zeta = \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x) J_a \Phi(x) \mathrm{d}x \tag{10－3.45}$$

上式即为非齐次方程式(10－3.41)满足初始条件 $\zeta(\xi_0) = \zeta'(\xi_0) = 0$ 的解。这种方法叫做脉冲过渡函数法。

现在来讨论地球扁率对导弹被动段 Z_1(或 $-\omega$)方向的影响。在该段起始点处，由于引力侧向分量 g_ω 只会产生 ω 方向上的加速度，因而满足 $\zeta(\xi_0) = \zeta'(\xi_0) = 0$。故(10－3.45)式即为所求的解。

将(10－3.42)式代入(10－3.45)，则得

$$\zeta = J_a \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)(-eE_c + 2E_s \sin x + 2E_c \cos x - eE_s \sin 2x - eE_c \cos 2x)\mathrm{d}x \tag{10－3.46}$$

对上式逐项进行积分，且令

$$\begin{cases}
J_1 = -eE_c \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)\mathrm{d}x = -eE_c + eE_c \sin\xi \sin\xi_0 + eE_c \cos\xi \cos\xi_0 \\
J_2 = 2E_s \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)\sin x \mathrm{d}x \\
\quad = \frac{1}{2}E_s \sin\xi - E_s \beta \cos\xi + \frac{1}{2}E_s \sin\xi \cos 2\xi_0 - \frac{1}{2}E_s \cos\xi \sin 2\xi_0 \\
J_3 = 2E_c \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)\cos x \mathrm{d}x \\
\quad = E_c \beta \sin\xi + \frac{1}{2}E_c \cos\xi - \frac{1}{2}E_c \sin\xi \sin 2\xi_0 - \frac{1}{2}E_c \cos\xi \cos 2\xi_0 \\
J_4 = -eE_s \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)\sin 2x \mathrm{d}x \\
\quad = \frac{1}{3}eE_s \sin 2\xi - \frac{1}{6}eE_s \sin\xi \cos 3\xi_0 + \frac{1}{6}eE_s \cos\xi \sin 3\xi_0 - \frac{1}{2}eE_s \sin\xi \cos\xi_0 - \frac{1}{2}eE_c \cos\xi \sin\xi_0 \\
J_5 = -eE_c \int_{\xi_0}^{\xi} \sin(\xi - x)\cos 2x \mathrm{d}x \\
\quad = \frac{1}{3}eE_c \cos 2\xi + \frac{1}{6}eE_c \sin\xi \cos 3\xi_0 + \frac{1}{6}eE_c \cos\xi \cos 3\xi_0 + \frac{1}{2}eE_c \sin\xi \sin\xi_0 - \frac{1}{2}eE_c \cos\xi \cos\xi_0
\end{cases} \tag{10－3.47}$$

经整理可得

$$\begin{cases}
\zeta = J_a[\sigma(\xi) - a_{1\zeta}\sin\xi - b_{1\zeta}\cos\xi] \\
\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi} = J_a[\sigma'(\xi) - a_{1\zeta}\cos\xi + b_{1\zeta}\sin\xi]
\end{cases} \tag{10－3.48}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}\sigma(\xi) = a_{0\zeta} + a_{2\zeta}\sin 2\xi + b_{2\zeta}\cos 2\xi + \beta\sigma_1(\xi)\\ \sigma_1(\xi) = c_{1\zeta}\sin\xi + d_{1\zeta}\cos\xi\\ \sigma'(\xi) = 2(a_{2\zeta}\cos 2\xi - b_{2\zeta}\sin 2\xi) + \sigma_1(\xi) + \beta\sigma'_1(\xi)\\ \sigma_1'(\xi) = c_{1\zeta}\cos\xi - d_{1\zeta}\sin\xi\\ a_{0\zeta} = -eE_c\\ d_{1\zeta} = -E_s\\ c_{1\zeta} = E_c\\ a_{2\zeta} = \frac{e}{3}E_s\\ b_{2\zeta} = \frac{e}{3}E_c\end{cases} \tag{10-3.49}$$

$$\begin{cases}a_{1\zeta} = \sigma(\xi_0)\sin\xi_0 + \sigma'(\xi_0)\cos\xi_0\\ b_{1\zeta} = \sigma(\xi_0)\cos\xi_0 - \sigma'(\xi_0)\sin\xi_0\end{cases} \tag{10-3.50}$$

(3) 关于 $\delta\eta$ 方程的解

由(10－3.29)中第二式

$$\frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \frac{1}{P}\{3\zeta E(\beta) + Ja^2\eta^2[1 - 5E^2(\beta)]\}$$

看出,等式右端函数中含有 η 变量,而 $\eta = \eta_0 + \delta\eta$,因 $\delta\eta$ 为小量,所以可用 η_0 近似代替 η。这样一来,该方程亦即为二阶线性非齐次微分方程,当然也可采用上述方法求解。但在求 $\delta\eta$ 方程的解时,我们却采用另外一种解法,实践表明,这种方法比前述方法要简便些。

将(10－3.37)式的变形式

$$\eta \approx \eta_0 = \frac{1}{P}(1 - e\cos\xi)$$

及(10－3.29)式、(10－3.48)式代入上式,经整理后得

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \frac{J_a}{P}\Big\{&\Big[\frac{3}{2}(a_{1\zeta}d_{1\zeta} - b_{1\zeta}c_{1\zeta}) + (1 + \frac{1}{2}e^2)(1 - \frac{5}{2}E_s^2 - \frac{5}{2}E_c^2)\\ &+ \frac{5}{8}e^2(E_s^2 - E_c^2)\Big] + 2eE_sE_c\sin\xi + e(3E_s^2 + 5E_c^2 - 2)\cos\xi\\ &+ \Big[\frac{3}{2}(-a_{1\zeta}c_{1\zeta} + b_{1\zeta}d_{1\zeta}) - 5(1 + \frac{1}{2}e^2)E_sE_c\Big]\sin 2\xi\\ &+ \Big[\frac{3}{2}(-a_{1\zeta}d_{1\zeta} - b_{1\zeta}c_{1\zeta}) + \frac{1}{2}e^2(1 - \frac{5}{2}E_s^2\\ &- \frac{5}{2}E_c^2) + \frac{5}{2}(1 + \frac{1}{2}e^2)(E_s^2 - E_c^2)\Big]\cos 2\xi\\ &+ 6eE_sE_c\sin 3\xi - 3e(E_s^2 - E_c^2)\cos 3\xi - \frac{5}{4}e^2E_sE_c\sin 4\xi\\ &+ \frac{5}{8}e^2(E_s^2 - E_c^2)\cos 4\xi + 3\beta\Big[\frac{1}{2}(-d_{1\zeta}^2 + c_{1\zeta}^2)\sin 2\xi + c_{1\zeta}d_{1\zeta}\cos 2\xi\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{10-3.51}$$

当令

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\delta\eta = \frac{J_a}{P}[a_{0\eta} - a_{1\eta}\sin\xi - b_{1\eta}\cos\xi + a_{2\eta}\sin 2\xi + b_{2\eta}\cos 2\xi + a_{3\eta}\sin 3\xi + b_{3\eta}\cos 3\xi + a_{4\eta}\sin 4\xi + b_{4\eta}\cos 4\xi + \beta(c_{1\eta}\sin\xi + d_{1\eta}\cos\xi + c_{2\eta}\sin 2\xi + d_{2\eta}\cos 2\xi)] \tag{10-3.52}$$

时,它的二次微分为

$$\frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} = \frac{J_a}{P}[a_{1\eta}\sin\xi + b_{1\eta}\cos\xi - 4a_{2\eta}\sin 2\xi - 4b_{2\eta}\cos 2\xi - 9a_{3\eta}\sin 3\xi - 9b_{3\eta}\cos 3\xi - 16a_{4\eta}\sin 4\xi - 16b_{4\eta}\cos 4\xi + 2c_{1\eta}\cos\xi - 2d_{1\eta}\sin\xi + 4c_{2\eta}\cos 2\xi - 4d_{2\eta}\sin 2\xi + \beta(-c_{1\eta}\sin\xi - d_{1\eta}\cos\xi - 4c_{2\eta}\sin 2\xi - 4d_{2\eta}\cos 2\xi)] \tag{10-3.53}$$

于是

$$\frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \frac{J_a}{P}[a_{0\eta} - 2d_{1\eta}\sin\xi + 2c_{1\eta}\cos\xi - (3a_{2\eta} + 4b_{2\eta})\sin 4\xi + (-3b_{2\eta} + 4c_{2\eta})\cos 2\xi - 8a_{3\eta}\sin 3\xi - 8b_{3\eta}\cos 3\xi - 15a_{4\eta}\sin 4\xi - 15b_{4\eta}\cos\xi + 3\beta(-c_{2\eta}\sin 2\xi - d_{2\eta}\cos 2\xi)] \tag{10-3.54}$$

比较(10-3.51)与(10-3.54)之系数得

$$\begin{cases} c_{2\eta} = \frac{1}{2}(d_{1\zeta}^2 - c_{1\zeta}^2) \\ d_{2\eta} = -c_{1\zeta}d_{1\zeta} \\ c_{1\eta} = \frac{1}{2}e(3E_s^2 + 5E_c^2 - 2) = -e(1 + c_{2\eta} - 2E_0) \\ E_0 = E_s^2 + E_c^2 = d_{1\zeta}^2 + c_{1\zeta}^2 \\ c'_{2\eta} = c_{2\eta} + 1 - 2E_0 \\ c_{1\eta} = -ec_{2\eta}' \\ d_{1\eta} = \frac{1}{2}(2eE_sE_c) = -ed_{2\eta} \\ a_{3\eta} = -\frac{3}{4}eE_sE_c = -\frac{3}{4}ed_{2\eta} \\ b_{3\eta} = \frac{3}{8}e(E_s^2 - E_c^2) = \frac{3}{4}ec_{2\eta} \\ a_{4\eta} = \frac{1}{12}e^2E_sE_c = -\frac{1}{9}ea_{3\eta} \\ b_{4\eta} = -\frac{1}{24}e^2(E_s^2 - E_c^2) = -\frac{1}{9}eb_{3\eta} \\ a_{0\eta} = \frac{1}{2}[3(a_{1\zeta}d_{1\zeta} - b_{1\zeta}c_{1\zeta}) - 5e_1E_0] + e_1 - 15b_{4\eta} \\ e_1 = 1 + \frac{1}{2}e^2 \\ a_{2\eta} = \frac{1}{2}[(a_{1\zeta}c_{1\zeta} - b_{1\zeta}d_{1\zeta}) + \frac{1}{3}(2 + 5e^2)d_{2\eta}] \\ b_{2\eta} = \frac{1}{2}[a_{1\zeta}d_{1\zeta} + b_{1\zeta}c_{1\zeta} - \frac{1}{3}(2 + 5e^2)c_{2\eta} - \frac{1}{3}e^2 + \frac{5}{6}e^2E_0] \end{cases} \tag{10-3.55}$$

若令

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} F(\xi) = a_{o\eta} + a_{2\eta}\sin 2\xi + b_{2\eta}\cos 2\xi + a_{3\eta}\sin 3\xi + b_{3\eta}\cos 3\xi + a_{4\eta}\sin 4\xi + b_{4\eta}\cos 4\xi + \beta F_1(\xi) \\ F_1(\xi) = c_{1\eta}\sin\xi + d_{1\eta}\cos\xi + c_{2\eta}\sin 2\xi + d_{2\eta}\cos 2\xi \end{cases} \tag{10-3.56}$$

时,则(10-3.52)可写成

$$\delta\eta = \frac{J_a}{P}[F(\xi) - a_{1\eta}\sin\xi - b_{1\eta}\cos\xi] \tag{10-3.57}$$

根据初始条件

$$\begin{cases} \delta\eta\big|_{\beta=0} = 0 \\ \left.\dfrac{d\delta\eta}{d\beta}\right|_{\beta=0} = 0 \end{cases} \tag{10-3.58}$$

可得

$$\begin{cases} F(\xi_0) - a_{1\eta}\sin\xi_0 - b_{1\eta}\cos\xi_0 = 0 \\ F'(\xi_0) - a_{1\eta}\sin\xi_0 + b_{1\eta}\cos\xi_0 = 0 \end{cases}$$

解此方程组,于是有

$$\begin{cases} a_{1\eta} = F(\xi_0)\sin\xi_0 + F'(\xi_0)\cos\xi_0 \\ b_{1\eta} = F(\xi_0)\cos\xi_0 - F'(\xi_0)\sin\xi_0 \end{cases} \tag{10-3.59}$$

综合上述各式,则得

$$\delta\eta = \frac{J_a}{P}[F(\xi) - a_{1\eta}\sin\xi - b_{1\eta}\cos\xi] \tag{10-3.60}$$

其中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
F(\xi) = \sum_{k=2}^{4}(a_{k\eta}\sin k\xi + b_{k\eta}\cos k\xi) + \beta F_1(\xi) + a_{0\eta} \\
F_1(\xi) = \sum_{k=1}^{2}(c_{k\eta}\sin k\xi + \mathrm{d}_{k\eta}\cos k\xi) \\
F'(\xi) = \sum_{k=2}^{4} k(a_{k\eta}\cos k\xi - b_{k\eta}\sin k\xi) + F_1(\xi) + \beta F'_1(\xi) \\
F_1'(\xi) = \sum_{k=1}^{2} k(c_{k\eta}\cos k\xi - \mathrm{d}_{k\eta}\sin k\xi) \\
a_{1\eta} = F(\xi_0)\sin\xi_0 + F'(\xi_0)\cos\xi_0 \\
b_{1\eta} = F(\xi_0)\cos\xi_0 - F'(\xi_0)\sin\xi_0 \\
c_{2\eta} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}_{1\zeta}^2 - c_{1\zeta}^2) \\
\mathrm{d}_{2\eta} = E_s E_c = -\mathrm{d}_{1\zeta}c_{1\zeta} \\
E_0 = \mathrm{d}_{1\zeta}^2 + c_{1\zeta}^2 \\
c'_{2\eta} = c_{2\eta} + 1 - 2E_0 \\
c_{1\eta} = -ec'_{2\eta} \\
\mathrm{d}_{1\eta} = -e\mathrm{d}_{2\eta} \\
a_{3\eta} = \frac{3}{4}e\mathrm{d}_{1\eta} \\
b_{3\eta} = \frac{3}{4}ec_{2\eta} \\
a_{4\eta} = -\frac{e}{9}a_{3\eta} \\
b_{4\eta} = -\frac{e}{9}b_{3\eta} \\
e_1 = 1 + \frac{e^2}{2} \\
a_{0\eta} = \frac{1}{2}[3(a_{1\zeta}\mathrm{d}_{1\zeta} - b_{1\zeta}c_{1\zeta}) - 5e_1E_0] - 15b_{4\eta} + e_1 \\
a_{2\eta} = \frac{1}{2}[a_{1\zeta}c_{1\zeta} - b_{1\zeta}\mathrm{d}_{1\zeta} + \frac{1}{3}(2 + 5e^2)\mathrm{d}_{2\eta}] \\
b_{2\eta} = \frac{1}{2}[a_{1\zeta}\mathrm{d}_{1\zeta} + b_{1\zeta}c_{1\zeta} - \frac{1}{3}(2 + 5e^2)c_{2\eta} - \frac{e^2}{3} + \frac{5}{6}e^2E_0]
\end{cases}
\tag{10-3.61}
$$

(4) 关于飞行时间 T 方程的解

若将主动段终点 k 至任一点 P 的飞行时间记为 T，则由(10－3.29)中第五式可得

$$
T = \int_0^{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{h\eta^2} = \int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{h\eta^2} \tag{10-3.62}
$$

因

$$
\eta = \eta_0 + \delta\eta
$$

故

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{(\eta_0 + \delta\eta)^2} \approx \frac{1}{\eta_0^2 + 2\eta_0\delta\eta} \approx \frac{1}{\eta_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta\eta}{\eta_0}\right) \tag{10-3.63}$$

将(10-3.37)、(10-3.60)及(10-3.63)式代入(10-3.62)式,并进行积分,则得

$$T = T(\xi) - T(\xi_0) \tag{10-3.64}$$

式中 $T(\xi)$ 是 ξ 函数,其表达式为

$$T(\xi) = T_\alpha(\xi) - 2J\frac{a^2}{h}\sum_{k=0}^{7} \mathrm{I}_{kt}(\xi) \tag{10-3.65}$$

其中

$$\begin{cases}
T_\alpha(\xi) = \dfrac{P^2}{h}T'_\alpha \\
\mathrm{I}_{0t}(\xi) = a_{0\eta}\,\mathrm{I}'_{0t} \\
\mathrm{I}_{1t}(\xi) = a_{1\eta}\,\mathrm{I}'_{1t} \\
T'_{0t} = \dfrac{1}{(1-e^2)^{3/2}}(b_{0t} + b_{1t}) \\
\mathrm{I}'_{0t} = \dfrac{1}{(1-e^2)^{5/2}}\left[e_1 b_{0t} + b_{1t}\left(2 + \dfrac{e}{2}b_{2t}\right)\right] \\
\mathrm{I}'_{1t} = \dfrac{1}{(1-e^2)^2}b_{2t}\left(1 + \dfrac{e}{2}b_{2t}\right) \\
\mathrm{I}_{2t}(\xi) = \dfrac{b_{1\eta}}{e}(T'_{0t} - \mathrm{I}'_{0t}) \\
\mathrm{I}_{3t}(\xi) = 2\dfrac{a_{2\eta}}{e}(b'_{2t} - \mathrm{I}'_{1t}) \\
\mathrm{I}_{4t}(\xi) = \dfrac{b_{2\eta}}{e^2}\left[(2-e^2)\,\mathrm{I}'_{0t} - 4T'_{0t} + b'_{0t}\right] \\
\mathrm{I}_{5t}(\xi) = \dfrac{1}{2}c'_{2\eta}(\beta' - T'_{0t}) \\
\mathrm{I}_{6t}(\xi) = \mathrm{d}_{2\eta}\left\{\left(\dfrac{2}{3e} + \beta'\sin\xi\right)\cos\xi + \dfrac{1}{3e}\left[\left(7 - \dfrac{5}{4}e^2\right)\mathrm{I}'_{1t} - (9+e^2)b'_{2t}\right]\right\} \\
\mathrm{I}_{7t}(\xi) = c_{2\eta}\left\{\left(\dfrac{2}{3e} + \beta'\sin\xi\right)\sin\xi - \beta' + \dfrac{2}{12e^2}\left[(28 - 19e^2 - e^4)\,\mathrm{I}'_{0t}\right.\right. \\
\qquad \left.\left. - (64 - 11e^2)T'_{0t} + (18 + 4e^2)b'_{0t}\right]\right\} \\
\beta' = \beta/(1 - e\cos\xi)^2 \\
b_{0t} = 2\mathrm{tg}^{-1}\left[\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\dfrac{\xi}{2}\right] \\
b'_{0t} = 2b_{0t}\Big/\sqrt{(1-e)^2} \\
b_{1t} = e\sin b_{0t} \\
b_{2t} = \cos b_{0t} \\
b'_{2t} = b_{2t}/(1-e^2)
\end{cases} \tag{10-3.66}$$

4. 弹道参数的计算

由于导弹被动段运动取决于主动段终点参数,因而若已知主动段终点绝对参数 r_k、V_k、Θ_k 时,则完全可应用(10-3.48)、(10-3.60)及(10-3.64)式确定出考虑地球扁率时被动段弹道任一瞬时的弹道参数。下面介绍这种求算方法。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(1) 求算已知 ξ(或 β) 所对应的弹道参数

根据所给定的主动段终点参数 r_k、V_k、Θ_k，首先应用公式

$$\begin{cases} h = r_k V_k \cos\Theta_k \\ \nu_k = \dfrac{r_k V_k^2}{\mu} \\ P = r_k \nu_k \cos^2\Theta_k = \dfrac{h^2}{\mu} \\ e = \sqrt{1 + \nu_k(\nu_k - 2)\cos^2\Theta_k} \\ \xi_0 = \cos^{-1}\left[\dfrac{1}{e}\left(1 - \dfrac{P}{r_k}\right)\right] \end{cases} \tag{10-3.67}$$

计算出 h、e、P 及 ξ_0，然后再应用(10-3.37)、(10-3.48)、(10-3.60)及(10-3.64)式分别确定出参数 η_0、ζ、ξ_0 及 T_0。在此基础上，再利用下列各式求其它参数：

P_1 及 P 点的地心纬度 φ_{s1} 和 φ_s

$$\varphi_{s1} = \sin^{-1}[E(\beta)] \tag{10-3.68}$$

$$\varphi_s = \varphi_{s1} - \zeta\cos\varphi_{s1}(1 + \zeta\sin\varphi_{s1}) \tag{10-3.69}$$

地心至 P 点的距离 r_p

$$r_p = \frac{1}{\delta\eta + \eta_0}\left[1 - \zeta\sin\varphi_{s1} + \frac{1}{2}\zeta^2\cos^2\varphi_{s1}\right] \tag{10-3.70}$$

P 点至 k 点间的绝对经差 λ_{skp}

$$\lambda_{skp} = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\sin\beta\dfrac{\sin\alpha_k}{\cos\varphi_{s1}}\right) & (\cos\beta - \sin\varphi_{sk}\sin\varphi_{s1}) \geqslant 0 \\ \pi - \sin^{-1}\left(\sin\beta\dfrac{\sin\alpha_k}{\cos\varphi_{s1}}\right) & (\cos\beta - \sin\varphi_{sk}\sin\varphi_{s1}) < 0 \end{cases} \tag{10-3.71}$$

P 点至 k 点间的相对经差

$$\lambda'_{skp} = \lambda_{skp} - T\omega \tag{10-3.72}$$

P 点的绝对速度在当地北东坐标系中的分量

$$\begin{cases} V_{xn} = u_\pi\cos\alpha_{p1} + \dot{r}_1\delta - \dot{z}_1\cos\varphi_s \\ V_{yn} = -u_\pi\delta\cos\alpha_{p1} + \dot{r}_1 - \dot{z}_1\cos\varphi_s \\ V_{zn} = u_\pi\sin\alpha_{p1} \end{cases} \tag{10-3.73}$$

其中

$$\begin{cases} \sin\alpha_{p1} = \dfrac{\cos\varphi_{sk}}{\cos\varphi_{s1}}\sin\alpha_k \\ \cos\alpha_{p1} = \cos\alpha_k\cos\lambda_{skp} - \sin\alpha_k\sin\lambda_{skp}\sin\varphi_{sk} \\ u_\pi = \eta h \\ \dot{r}_1 = -\dfrac{h}{P}\{e\sin\xi + J_a[F'(\xi) - a_{1\eta}\cos\xi + b_{1\eta}\sin\xi]\} \\ \dot{z}_1 = u_\pi\dfrac{d\zeta}{d\xi} + \zeta\dot{r}_1 \\ \delta = \varphi_{s1} - \varphi_s \end{cases} \tag{10-3.74}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

P 点的相对速度在当地北东坐标系中的分量 $V'_{in}(i = x, y, z)$

$$\begin{cases} V'_{xn} = V_{xn} \\ V'_{yn} = V_{yn} \\ V'_{zn} = V_{zn} - r\omega\cos\varphi_c \end{cases} \tag{10-3.75}$$

绝对速度倾角和相对速度倾角

$$\Theta = \mathrm{tg}^{-1}[V_{yn}/(V_{yn}^2 + V_{zn}^2)^{\frac{1}{2}}] \tag{10-3.76}$$

$$\Theta' = \mathrm{tg}^{-1}[V'_{yn}/(V'^2_{yn} + V'^2_{zn})^{\frac{1}{2}}] \tag{10-3.77}$$

(2) 求算已知飞行时间所对应的弹道参数

虽然(10-3.64)式给出了被动段飞行时间 T 与 ξ 的显函数关系式，但是在给定飞行时间 T_c 的情况下求算所对应之 ξ 时，由于两者没有显函数关系而引起困难，因此需要用迭代法进行求解，其迭代方法如下。

在由给定的初始值求出弹道参数 h、e、P 及 ξ_0 后，首先按照下式

$$\xi^{[0]} = \xi_0 + \frac{h}{r_k^2}T_c \tag{10-3.78}$$

算出 $\xi^{[0]}$，然后以 $\xi^{[0]}$ 为自变量，由 $i = 0$ 开始进行迭代计算：

$$\begin{cases} \eta_0^{[i]} = \dfrac{1}{P}(1 - e\cos\xi^{[i]}) \\ \delta\eta^{[i]} = \dfrac{J_a}{P}[F(\xi^{[i]} - a_{1\eta}\sin\xi^{[i]} - b_{1\eta}\cos\xi^{[i]}] \\ \eta^{[i]} = \eta_0^{[i]} + \delta\eta^{[i]} \\ T^{[i]} = T(\xi^{[i]}) - T(\xi_0) \\ \Delta\xi^{[i]} = (T_c - T^{[i]})(\eta^{[i]})^2 h \\ \xi^{[i+1]} = \xi^{[i]} + \Delta\xi^{[i]} \end{cases} \tag{10-3.79}$$

当满足给定的允许值 ε，即

$$|\Delta\xi^{[i]}| < \varepsilon \tag{10-3.80}$$

时，迭代计算结束。例如，假定 $i = n$ 时已满足(10-3.80)式要求，则取 $\xi^{[i+1]} = \xi_c$，再将此值代入(10-3.68)～(10-3.77)式，即可求出所需要的各弹道参数。

(3) 求算已给定的 r_c 所对应的弹道参数

欲求给定距离 r_c 所对应的各弹道参数，首先需要求出 r_c 对应的 ξ_c 值。但由于 r_c 与 ξ_c 也没有一一对应的显函数式关系，因此也只能应用迭代的方法求解。

若在已知 r_c 的情况下求算不计再入空气阻力时导弹被动段各参数，首先在求得 h、P、ξ_0 及 e 的基础上，计算

$$\xi^{[0]} = \cos^{-1}\left[(1 - \frac{P}{R})/e\right] \tag{10-3.81}$$

其中 R 为地球平均半径，然后由 $i = 0$ 开始进行迭代计算

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{cases}
\eta_0^{[i]} = \dfrac{1}{P}(1 - e\cos\xi^{[i]}) \\
\delta\eta^{[i]} = \dfrac{J_a}{P}[F(\xi^{[i]}) - a_{1\eta}\sin\xi^{[i]} - b_{1\eta}\cos\xi^{[i]}] \\
\eta^{[i]} = \eta_0^{[i]} + \delta\eta^{[i]} \\
\xi^{[i]} = J_a[a(\xi^{[i]}) - a_{1\zeta}\sin\xi^{[i]} - b_{1\zeta}\cos\xi^{[i]}] \\
\varphi_{s1}^{[i]} = \sin^{-1}[F(\xi^{[i]})] \\
\varphi_s^{[i]} = \sin^{-1}[(\sin\varphi_{s1}^{[i]} - \zeta^{[i]})(1 + \zeta^{[i]}\sin\varphi_{s1}^{[i]})] \\
R_c^{[i]} = a[1 - \dfrac{e'^2}{2}\sin^2\varphi_s^{[i]}(1 - \dfrac{3}{4}e'^2\sin^2\varphi_s^{[i]})] \\
\delta r^{[i]} = \dfrac{1}{\eta^{[i]}}(1 - \zeta^{[i]}\sin\varphi_{s1}^{[i]} + \dfrac{1}{2}\zeta^{[i]}\cos^2\varphi_{s1}^{[i]}) - R_c^{[i]} \\
\Delta\xi^{[i]} = -\mathrm{tg}^{-1}\Theta^{[i]}\delta r^{[i]}/R \\
\xi^{[i+1]} = \xi^{[i]} + \Delta\xi^{[i]}
\end{cases}
\tag{10-3.82}
$$

当满足 $|\Delta\xi^{[i]}| < \varepsilon$ 时，终止迭代计算。若当 $i = n$，(10－3.80) 式恰好得到满足时，则取 $\xi_c = \xi^{[n+1]}$，并将 ξ_c 值代入(10－3.68) ~ (10－3.77) 式，便可求得各弹道参数值。

10.3.2 几何学的影响

由地球重力学可知，当地球为正常椭球体时，其表面点至地心 O_e 的距离 R 与地心纬度 φ_s 有关。在一阶近似条件下，R 与 φ_s 的关系可表为

$$R = a(1 - \bar{\alpha}\sin^2\varphi_s) \tag{10-3.83}$$

式中 $\bar{\alpha}$ 为地球扁率常数。

若将地球椭球体与地球圆球体之地心距差记作 Δh，则有

$$\Delta h = R - \tilde{R}$$

将(10－3.83) 代入上式得

$$\Delta h = a - \tilde{R} - a\bar{\alpha}\sin^2\varphi_s \tag{10-3.84}$$

如果导弹落点地心纬度为 φ_{sc}，那么落点的地心距差为

$$\Delta h_c = a - \tilde{R} - a\bar{\alpha}\sin^2\varphi_{sc} \tag{10-3.85}$$

显然，由于 Δh_c 的存在，则必将产生落点的射程偏差。分析表明，当 Δh_c 为正时，射程将减小；反之射程将增大。

由于地球扁率很小，地心距差 Δh_c 也并不大，所以可将 Δh_c 所对应的弹道视为直线(图 10－12)。这样，可按下列几何关系式求其射程偏差和射程角偏差

$$
\begin{cases}
\Delta L_2 = \Delta h_c\mathrm{ctg}\Theta_c \\
\Delta\beta_2 = \dfrac{\Delta h_c}{R}\mathrm{ctg}\Theta_c
\end{cases}
\tag{10-3.86}
$$

式中 Θ_c 为导弹实际落角。

若顾及地球扁率所引起的弹道偏差较小情况时，我们还可进一步用地球为圆球时所

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

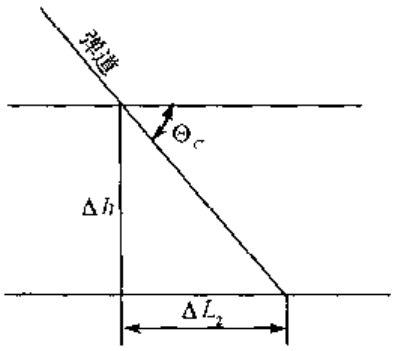


图 10 - 12

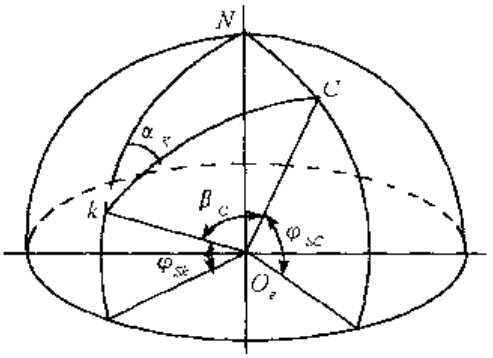


图 10 - 13

对应的弹道倾角$\widetilde{\Theta}_c$来代替实际弹道倾角Θ_c。因此，在一阶近似条件下，(10 - 3.86)式又可简化为

$$\Delta\beta_2 = \frac{a-\tilde{R}}{\tilde{R}}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c - \tilde{\alpha}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c\sin^2\varphi_{sc} \tag{10-3.87}$$

根据图 10 - 13 和球面三角形有关公式可得

$$\sin\varphi_{sc} = \cos\tilde{\beta}_c\sin\varphi_{sk} + \sin\tilde{\beta}_c\cos\varphi_{sk}\cos\alpha_k$$

代入(10 - 3.87)式，则落点射程角偏差为

$$\Delta\beta_2 = q_{20} + q_{21}\sin^2\varphi_{sk} + q_{22}\sin 2\varphi_{sk}\cos\alpha_k + q_{23}\cos\varphi_{sk}\cos^2\alpha_k \tag{10-3.88}$$

其中

$$\begin{cases} q_{20} = \dfrac{a-\tilde{R}}{\tilde{R}}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c \\ q_{21} = -\tilde{\alpha}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c\cos\tilde{\beta}_c \\ q_{22} = -\tilde{\alpha}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c\sin\tilde{\beta}_c\cos\tilde{\beta}_c \\ q_{23} = -\tilde{\alpha}\mathrm{ctg}\,\widetilde{\Theta}_c\sin\tilde{\beta}_c \end{cases} \tag{10-3.89}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第十一章　弹道导弹的再入段运动

在给定的初始条件下，应用数值积分方法解第七章已讨论过的弹道导弹被动段运动微分方程组，便可求得导弹自由段或再入段的运动参数。但为了便于分析各参数间的关系，人们总希望求得再入段弹道方程的解析解。本章就是在一些假设条件下，探求弹道导弹再入段运动方程的近似解析解，以供导弹初步设计和作战使用时参考。

§11.1　再入段运动微分方程的建立

因弹道导弹再入段的射程较小，飞行时间也较短，因此在研究其运动时，可作如下假设：

(1) 不考虑地球旋转，即 $\omega = 0$；

(2) 认为地球为圆球，即引力场为一有心力场；

(3) 认为导弹的纵对称轴始终处于由再入点的速度矢 $\boldsymbol{V}_c$ 及径向 $\boldsymbol{r}_c$ 所组成的平面之内，即侧滑角 $\beta = 0$。

在上述假设条件下，导弹在再入段运动时不受垂直射面的侧力作用，因面整个再入段运动为一平面运动。

根据牛顿第二定律，可写出质量为 m 的导弹再入段的矢量运动方程

$$m\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{R}' + m\boldsymbol{g} \qquad (11-1.1)$$

其中

$\dot{\boldsymbol{V}}$ 为导弹的飞行加速度；

$\boldsymbol{R}'$ 为作用于导弹上的空气动力；

$m\boldsymbol{g}$ 为导弹受的地球引力。

因再入段运动方程在速度坐标系上建立较为方便，故将上式向速度坐标系投影。

令导弹飞行速度 $\boldsymbol{V}$ 对再入点处的水平线倾角为 θ，而 $\boldsymbol{V}$ 对当地水平线的倾角为 Θ(图 11-1)，由于再入段的速度在水平线之下，故 θ 和 Θ 均为负值。

因注意到速度矢量的转动角速度为 $\dot{\theta}$，则

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_c^0 + V\dot{\theta}\boldsymbol{y}_c^0 \qquad (11-1.2)$$

由图 11-1 可知

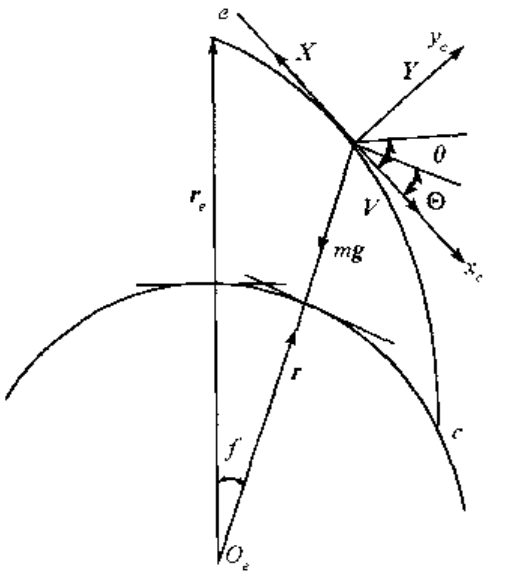


图 11-1

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} R_{xc} = -X \\ R_{yc} = Y \\ g_{xc} = -g\sin\Theta \\ g_{yc} = -g\cos\Theta \end{cases} \tag{11-1.3}$$

故(11-1.1)式在速度坐标系上的投影式为

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{X}{m} - g\sin\Theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{Y}{mV} - \dfrac{g}{V}\cos\Theta \end{cases} \tag{11-1.4}$$

由图11-1可得两个倾角θ及Θ间关系式

$$\Theta = f + \theta \tag{11-1.5}$$

求导数,得

$$\dot{\Theta} = \dot{f} + \dot{\theta} \tag{11-1.6}$$

式中f及$\dot{f}$分别为导弹任一位置时相对再入点的航程角及其变化率。

速度矢量V在径向r及当地水平线方向上(顺导弹运动方向为正)的投影分别为

$$\begin{cases} \dot{r} = V\sin\Theta \\ r\dot{f} = V\cos\Theta \end{cases} \tag{11-1.7}$$

综合(11-1.4)式和(11-1.7)式便得导弹再入段运动微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{X}{m} - g\sin\Theta \\ \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{Y}{mV} + \left(\dfrac{V}{r} - \dfrac{g}{V}\right)\cos\Theta \\ \dfrac{dr}{dt} = V\sin\Theta \\ \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{RV}{r}\cos\Theta \end{cases} \tag{11-1.8}$$

式中$L = Rf$为导弹再入段任一位置时的射程。

上述方程组中有四个未知量V、Θ、r、L,当给定再入起始点的初值,便可对该方程组进行积分,直到$r = R$为止,即可得整个再入段的弹道参数。

§11.2 零冲角再入时的运动参数近似计算

由第一章可知,一般导弹弹头是以任意姿态进入大气层的,但由于弹头是静稳定的,因此,当有冲角再入时,稳定力矩将使其减小,甚至到零。所以在研究弹头的质心运动时,可以认为冲角$\alpha = 0$,即认为导弹在再入段不受升力的作用。此时,再入段运动微分方程组可由(11-1.8)导出,即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{X}{m} - g\sin\Theta \\ \dfrac{d\Theta}{dt} = \left(\dfrac{V}{r} - \dfrac{g}{V}\right)\cos\Theta \\ \dfrac{dr}{dt} = V\sin\Theta \\ \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{RV}{r}\cos\Theta \end{cases} \tag{11-2.1}$$

11.2.1 阻力系数为常值时的再入弹道解

1. 再入段最大负加速度的近似计算

当导弹以高速进入稠密大气层时，在巨大的空气阻力作用下，导弹将有一个较大的加速度，但由于该加速度的方向与速度方向相反，故称为最大负加速度。对于远程导弹而言，最大负加速度可达几十个 g（g 为重力加速度），这就使弹头的结构强度以及头部控制仪表的正常工作受到很大影响。因此，最大负加速度是导弹初步设计中必须考虑的问题之一。

为了能找出估量最大负加速度的解析式，现作如下假设：

(1) 略去引力作用。实践表明，除弹头刚刚进入大气层的一小段弹道外，其余绝大部分再入弹道上的空气阻力均远远大于引力，因此引力完全可以略去，此时，再入段弹道为一直线弹道；

(2) 当地水平线的转动角速度为零，即 $\dot{\Theta} = 0$。这是由于再入段射程角 f 很小，可近似将球面看成平面；

(3) 大气密度的标准分布取为指数规律 $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$，而 $\beta = \dfrac{1}{R^* T_0}$，$R^*$ 为以重力工程制单位表示的海平面干燥空气之气体常数，其值为 $R^* = 29.27\text{kg}\cdot\text{m/kg}\cdot\text{℃}$，$T_0$ 为海平面绝对温度；

(4) 阻力系数 C_x 为常数。这是因为导弹在达到最大负加速度以前，其飞行速度还相当大，即 M 数相当大，此时阻力系数随 M 数的变化仍很缓慢，故可略去这种变化。

根据以上假设，运动方程式(11 - 2.1) 可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{X}{m} \\ \dfrac{dr}{dt} = V\sin\Theta_c \end{cases}$$

注意到

$$X = \frac{1}{2} C_x S_m \rho V^2 = \frac{C_x S_m}{2} \rho_0 e^{-\beta h} V^2$$

$$r = R + h$$

则有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -B\rho_0 e^{-\beta h}V^2 \\ \dfrac{dh}{dt} = V\sin\Theta_c \end{cases} \tag{11-2.2}$$

其中

$$B = \frac{C_x S_m}{2m}$$

由于

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}$$

将(11-2.2)代入上式,得

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{B\rho_0}{\sin\Theta_e}e^{-\beta h}V \tag{11-2.3}$$

因此

$$\frac{dV}{V} = \frac{B\rho_0}{\beta\sin\Theta_e}e^{-\beta h}d(-\beta h)$$

积分上式可得

$$\ln\frac{V}{V_e} = \frac{B}{\beta\sin\Theta_e}(\rho - \rho_e)$$

当再入点高度较高时,$\rho_e = 0$,上式成为

$$V = V_e\exp\left(\frac{B\rho_0}{\beta\sin\Theta_e}e^{-\beta h}\right) \tag{11-2.4}$$

(11-2.4)式即为在上述假设条件下速度随高度变化的规律。至于最大负加速度发生的高度,则也不难由加速度与高度 h 的函数关系中得到。事实上将(11-2.2)第一式对 h 进行微分可有

$$\frac{d\dot{V}}{dh} = B\rho_0 e^{-\beta h}\left(\beta V^2 - 2V\frac{dV}{dh}\right)$$

将(11-2.3)代入上式,得

$$\frac{d\dot{V}}{dh} = B\rho V^2\left(\beta + \frac{2B\rho}{\sin\Theta_e}\right) \tag{11-2.5}$$

为求最大负加速度发生的高度 h_m,可令上式右端等于零。显然,因 $B\rho V^2$ 不为零,故可得

$$\beta + \frac{2B\rho_m}{\sin\Theta_e} = 0$$

因此得

$$\rho_m = -\frac{\beta\sin\Theta_c}{2B} \tag{11-2.6}$$

顾及关系式

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$$

于是

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\rho_0 e^{-\beta h_m} = -\frac{\beta \sin\Theta_e}{2B}$$

因此

$$h_m = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{2B\rho_0}{\beta\sin\Theta_e}\right)$$

即

$$h_m = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{C_x S_m \rho_0}{m\beta\sin\Theta_e}\right) \tag{11-2.7}$$

可以看出，再入最大负加速度出现的高度 h_m 与导弹质量 m、再入点弹道倾角 Θ_e、空气阻力系数 C_x 及导弹横截面积 S_m 有关。当 m 和 $|\Theta_e|$ 越大，或者 C_x、S_m 越小时，则 h_m 之值就越小。另外，还可以得出结论：最大负加速度出现的高度与再入点速度 V_e 的大小无关。

当 $h = h_m$ 时，由(11-2.4)可得

$$V_m = V_e \exp\left(\frac{B\rho_m}{\beta\sin\Theta_e}\right)$$

再将(11-2.6)式代入上式，则有

$$V_m = V_e e^{-\frac{1}{2}} = 0.61 V_e \tag{11-2.8}$$

由此说明，在前述假设条件下，导弹处于最大负加速度时，其速度仅与再入速度 V_e 有关。

将(11-2.6)和(11-2.8)代入(11-2.2)第一式即得导弹在再入段的最大负加速度

$$\dot{V}_m = -B\rho_m V_m^2 = \frac{\beta V_e^2}{2e}\sin\Theta_e \tag{11-2.9}$$

显然，最大负加速度 $\dot{V}_m$ 也仅与导弹再入点的运动参数 V_e、Θ_e 有关。因此，$|\dot{V}_m|$ 的降低，只能是 V_e 或 $|\Theta_e|$ 的减小。

2. 再入段运动参数的近似计算

计算结果表明，在大多数场合下，当导弹再入段的运动速度因空气阻力作用减小到 V_e 值的一半以前，就会使导弹的加速度达到最大负加速度值。因此，对于具有较大再入速度 V_e 的导弹，在求其最大负加速度时，忽略引力的作用是可行的。但在求取整个再入段的运动参数时，如仍忽略引力作用，则会因再入段的速度越来越小而引起较大的误差。不过，由于再入段引力加速度 g 的大小变化不大，故可取 $g = g_0$，以便求出运动参数的解析表达式。

首先，从动量矩定理出发来讨论。显然，弹道上任一点处导弹对地心的动量矩为 $mrV\cos\Theta$，而所有外力对地心的矩就是空气阻力 X 对地心的矩，即 $-rX\cos\Theta$。故根据动量矩定理有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(rV\cos\Theta) &= -r\frac{X}{m}\cos\Theta \\ &= -r\frac{C_x S_m}{2m}\rho V^2\cos\Theta\end{aligned} \tag{11-2.10}$$

上式除以(11-2.1)第三式，得

$$\frac{d}{dh}(rV\cos\Theta) = -rV\cos\Theta\frac{C_x S_m}{2m\sin\Theta}\rho$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

令

$$k = \frac{C_x S_m}{2m\sin\Theta} \tag{11-2.11}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}(rV\cos\Theta) = -rVk\cos\Theta\rho$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(rV\cos\Theta)}{rV\cos\Theta} = -k\rho\mathrm{d}h = -k\rho_0 e^{-\beta h}\mathrm{d}h \tag{11-2.12}$$

实际计算时发现，对于再入角 $|\Theta|$ 较大时的弹道导弹来说，在再入段可近似认为 k 为一常数。这是由于导弹再入时，速度不断减小，故 M 数也不断减小，不过 M 数仍远大于1。根据 C_x 随 M 数变化的曲线可知，此时 C_x 将随 M 数减小而增大，因此 k 式中的分子是不断增加的；而 k 式中的分母值也由于引力作用使得 $|\Theta|$ 不断增大而逐渐增大，故可近似认为 k 为常数，且由于再入段 Θ 是负值，因而 k 为小于零的常值。

对(11-2.12)式两端从再入点 e 积分到再入段任一点，则得

$$\ln\frac{rV\cos\Theta}{r_e V_e\cos\Theta_e} = \frac{k\rho_0}{\beta}(e^{-\beta h} - e^{-\beta h_e})$$

即

$$rV\cos\Theta = r_e V_e\cos\Theta_e\exp\left[\frac{k}{\beta}(\rho-\rho_e)\right] \tag{11-2.13}$$

其中 r_e、V_e、h_e、ρ_e 分别为再入点 e 到地心的距离、再入点速度、再入点高程及再入点处的大气密度。

若认为 $\rho_e = 0$ 时，则

$$rV\cos\Theta = r_e V_e\cos\Theta_e e^{\frac{k}{\beta}\rho} \tag{11-2.14}$$

若认为再入段完全处于真空，即 $\rho = 0$ 时，则有

$$rV\cos\Theta = r_e V_e\cos\Theta_e$$

即满足动量矩守恒定律，这一结论也早已被椭圆弹道理论所证明。式(11-2.14)说明，考虑空气阻力后，有一个修正系数 $e^{\frac{k}{\beta}\rho}$，由于 $k<0$，故 $e^{\frac{k}{\beta}\rho}<1$，这意味着气动阻力的作用将使导弹动量矩减小。

(11-2.14)式中有三个未知数：r、Θ、V，即使以 r 为自变量亦须补充一个关系式，为此，我们由动量矩对 t 的微分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rV\cos\Theta) = V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\Theta) + r\cos\Theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

由于假设 $g = g_0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{X}{m} - g_0\sin\Theta$$

代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rV\cos\Theta) = V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\Theta) - r\frac{X}{m}\cos\Theta - rg_0\sin\Theta\cos\Theta$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将该式右端与(11 - 2.10)式右端进行比较可知

$$V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\Theta) = rg_0\sin\Theta\cos\Theta$$

根据(11 - 2.2)第二式,上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}(r\cos\Theta)}{r\cos\Theta} = \frac{g_0}{V^2}\mathrm{d}h$$

应用(11 - 2.14)式,上式又可进一步写成

$$\frac{\mathrm{d}(r\cos\Theta)}{r^3\cos^3\Theta} = \frac{g_0}{r_e^2V_e^2\cos^2\Theta e}\mathrm{e}^{-2\frac{k}{\beta}\rho}\mathrm{d}h \tag{11 - 2.15}$$

令

$$\eta = -\frac{2k}{\beta}\rho_0\mathrm{e}^{-\beta h} \tag{11 - 2.16}$$

则

$$\mathrm{d}\eta = 2k\rho_0\mathrm{e}^{-\beta h}\mathrm{d}h$$

所以

$$\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}\eta}{\beta\eta} \tag{11 - 2.17}$$

将其代入(11 - 2.15),即得

$$\frac{\mathrm{d}(r\cos\Theta)}{r^3\cos^3\Theta} = -\frac{g_0}{\beta r_e^2V_e^2\cos^2\Theta e}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta$$

由再入点 e 积分上式至再入段任一点,则得

$$\frac{1}{2r_e^2\cos^2\Theta_e} - \frac{1}{2r^2\cos^2\Theta} = -\frac{g_0}{\beta r_e^2V_e^2\cos^2\Theta_e}\int_{\eta_e}^{\eta}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta$$

即

$$\frac{1}{2r^2\cos^2\Theta} - \frac{1}{2r_e^2\cos^2\Theta_e} = \frac{g_0}{\beta r_e^2V_e^2\cos^2\Theta_e}\left(\int_0^{\eta}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta - \int_0^{\eta_e}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta\right) \tag{11 - 2.18}$$

再令

$$\begin{cases} E(\eta) = \int_0^{\eta}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta \\ E(\eta_e) = \int_0^{\eta_e}\frac{\mathrm{e}^{\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta \end{cases} \tag{11 - 2.19}$$

(11 - 2.19)是一超越函数,其数值可根据 η 查表得到。因而(11 - 2.18)式可写成

$$\frac{1}{2r^2\cos^2\Theta} - \frac{1}{2r_e^2\cos^2\Theta_e} = \frac{g_0}{\beta r_e^2V_e^2\cos^2\Theta_e}[E(\eta) - E(\eta_e)]$$

经整理得

$$r\cos\Theta = \frac{r_e\cos\Theta_e}{\sqrt{1 + \frac{2g_0}{\beta V_e^2}[E(\eta) - E(\eta_e)]}} \tag{11 - 2.20}$$

由(11 - 2.14)式和(11 - 2.20)式即可求出以 r 为自变量的再入段任一点的速度和弹道倾

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

角。

当 $r = R$ 时，$\rho = \rho_0$，$\eta = \eta_0 = -\frac{2k}{\beta}\rho_0$，由(11 - 2.20)可求得落角 Θ_c，即

$$\cos\Theta_c = \frac{r_e\cos\Theta_e}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2g_0}{\beta V_e^2}[E(\eta_c)-E(\eta_e)]}} \tag{11-2.21}$$

当其代入(11 - 2.14)，从而可求得落速

$$V_c = \frac{r_e V_e\cos\Theta_e}{R\cos\Theta_c}e^{-\frac{\eta_c}{2}} \tag{11-2.22}$$

需要指出，若在整个再入段上将 k 看成常数引起的误差过大时，则可将 k 分段视为常数，以提高精度。另外，上述所有解析式均是在包括阻力系数 C_x 为常数的假设条件下导出的。如果阻力系数是随速度的变化而变化的一个变系数，那么同样也能导出零冲角再入时的再入段运动参数的解析式。

11.2.2 阻力系数为速度和高度函数及不计引力时的再入弹道解

事实上，阻力系数并非是常数，不但与飞行马赫数 M 有关，而且由于实际大气存在粘性，因而在总阻力中除占主导的激波阻力外，还应含有占比重不大的粘性摩擦阻力。理论与实验业已表明，粘性摩擦阻力随着雷诺数的增大而减少。故对一定速度下的给定再入体来说，由于大气密度随高度的增加而急剧减少，因而其雷诺数必将随高度的增加而降低，致使摩擦阻力增大，结果必然导致总气动阻力随高度的增加而增加。因此认为阻力系数不仅与马赫数(或速度)有关，而且也与飞行雷诺数(或高度)有关，于是提出了将再入体总阻力系数 C_x 表成速度与高度的函数

$$C_x = C_{x0}V^n e^{-\alpha h} \tag{11-2.23}$$

的想法，并在此基础上和前面的假设条件下，同样获得不计地球引力及扁率影响时的再入弹道解析解。计算表明，这种方法较前述方法的计算精度有一定提高。

在上述假设下，由于

$$\begin{cases} C_x = C_{x0}V^n e^{-\alpha h} \\ \rho = \rho_0 e^{-\beta h} \end{cases}$$

所以再入弹道方程组(11 - 2.1)成为

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -B\rho_0 e^{-\mu h}V^{n+2} \\ \dfrac{dh}{dt} = V\sin\Theta_e \\ \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{RV}{r}\cos\Theta_e \end{cases} \tag{11-2.24}$$

式中

$$\begin{cases} B = \dfrac{C_{x0}S_m}{2m} \\ \mu = \alpha + \beta \end{cases} \tag{11-2.25}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

C_{x0}、ρ_0、n、α、β 为拟合系数，对于给定的再入体来说，其值为常数。

由上述方程组的第一、二式消去时间 t，可得

$$V^{-(n+1)}\mathrm{d}V = B\frac{\rho_0}{\mu\sin\Theta_e}\mathrm{e}^{-\mu h}\mathrm{d}(-\mu h) \tag{11-2.26}$$

从再入点到任意点积分，且顾及再入高度 h_e 时之大气密度 $\rho_e = \rho_0 \mathrm{e}^{-\beta h_e} = 0$ 的情况，则得任意高度时的再入飞行速度式

$$V = (V_e^{-n} - C\mathrm{e}^{-\mu h})^{-\frac{1}{n}} \tag{11-2.27}$$

式中

$$C = \frac{Bn\rho_0}{\mu\sin\Theta_e} \tag{11-2.28}$$

采用与阻力系数为常值和不计引力时的再入弹道各参数计算式相类似的推导方法，便得阻力系数为速度、高度函数时的最大负加速度 $\dot{V}_m$ 及其出现的高度 h_m、加速度、速度和过载等关系式，即

加速度

$$\dot{V} = -B\rho_0(V_e^{-n} - C\mathrm{e}^{-\mu h})^{-\frac{n+2}{2}}\mathrm{e}^{-\mu h} \tag{11-2.29}$$

最大负加速度

$$\begin{aligned}\dot{V}_m &= \frac{\mu\sin\Theta_e}{n+2}V_e^2\left(1+\frac{n}{2}\right)^{-\frac{2}{n}}\\ &= \frac{\mu\sin\Theta_e}{n+2}V_m^2\end{aligned} \tag{11-2.30}$$

最大负加速度出现高度

$$h_m = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{-C_{x0}S_m\rho_0}{m\mu\sin\Theta_e}V_m^n\right) \tag{11-2.31}$$

最大负加速度出现时对应的飞行速度

$$V_m = V_e\left(1+\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{11-2.32}$$

再入过载 n_x 和最大再入过载 n_{xm}

$$n_x = \left|\frac{\dot{V}}{g_0}\right| = \left|\frac{-B\rho_0}{g_0}(V_e^{-n} - C\mathrm{e}^{-\mu h})^{-\frac{n+2}{2}}\mathrm{e}^{-\mu h}\right| \tag{11-2.33}$$

$$\begin{aligned}n_{xm} &= V_e^2\left|\frac{\mu\sin\Theta_e}{g_0(n+2)}\left(1+\frac{n}{2}\right)^{-\frac{2}{n}}\right|\\ &= \left|\frac{\mu}{g_0}\frac{\sin\Theta_e}{(n+2)}V_m^2\right|\end{aligned} \tag{11-2.34}$$

再入体任一高度时之飞行时间可由(11-2.24)和(11-2.29)式导出，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}h}{V\sin\Theta_e} &= \frac{1}{\sin\Theta_e(V_e^{-n} - C\mathrm{e}^{-\mu h})^{-\frac{1}{n}}}\mathrm{d}h\\ &= \frac{1}{\sin\Theta_e}(V_e^{-n} - C\mathrm{e}^{-\mu h})^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}h\end{aligned}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

上式按二项式展开，并由再入点到任一点积分，即得任一高度 h 时之飞行时间

$$t = \frac{-1}{\mu V_e \sin\Theta_e}\left\{\mu(h_e - h) + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \frac{1}{k}\left(\frac{W}{n}\right)^k \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j}[1-(j-1)n]\right\} \tag{11-2.35}$$

式中

$$W = CV_e^n e^{-\mu h} \tag{11-2.36}$$

N 为项数，正整数。

任一高度时的再入射程，也可由(11－2.24)式导出。事实上，由方程组(11－2.24)第三式和第二式即可得

$$\mathrm{d}L = R\mathrm{ctg}\Theta_e \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

由此得任一高度 h 时的再入射程为

$$\begin{aligned} L &= R\mathrm{ctg}\Theta_e \ln\frac{R+h}{R+h_e} \\ &= R\mathrm{ctg}\Theta_e \ln\frac{r}{r_e} \end{aligned} \tag{11-2.37}$$

§11.3 非零冲角再入时的弹道近似解

目前，再入体重返大气层的再入弹道通常有两种，一种是无升力(即零冲角)再入弹道，另一种则是有升力(即非零冲角)再入弹道。前者实施起来较为简单，但其在再入过程中却因无法进行控制和调节而导致突防能力降低。同时还因最大负加速度大，将引起过大的热烧蚀、粒子云侵蚀以及过大的过载量，这对卫星、宇宙飞船、导弹弹头等类型的再入体都十分不利。事实上，弹头再入大气层飞行时，在产生阻力的同时，还产生气动升力，因此有升力再入弹道，虽然相对无升力再入弹道可能会复杂许多，但也有许多优点。首先，在再入过程中，弹头相应产生一定比例的升力，可使最大负加速度降低，避免再入飞行中过大的热烧蚀、粒子云侵蚀和过载值，确保再入体安全飞向目标。其次，对升阻比不为常值的可调节再入弹道来说，由于可按飞行的具体状态调节升力，因而当其开始进入大气层时，可使弹道倾角 Θ 大些，少用或不用升力，以使其减速快些；而当其进入稠密的大气层时，因速度大，加热量和过载值也大，此时可增大升力，使再入弹道变平缓，降低减速度值，取得较小的加热量和过载量，满足再入体安全飞行的要求。

依据再入体特征、再入起始条件、再入后冲角的变化规律以及反导武器系统的拦截方式与布防区的状况，对精确的再入弹道方程进行数值计算，并对计算结果分析比较，自然可以选择出最佳的再入弹道。然而这种计算相当繁杂，而且所得结果也无法进行解析的分析和比较。因此在初步估量时，常常在一定约束条件下，给出再入弹道方程的近似解析解。

从再入弹道方程中容易看出，影响再入弹道参数的外力有气动阻力 X、气动升力 Y、地球引力 $G = mg$ 以及离心力 $\frac{mV^2}{r}$。为获得再入弹道解析解，工程上通常对上述四个力近似处理，简化运动方程以求得解析解。显然，不同近似条件下的解析解，自然有不同的形式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

和精度。

不考虑地球引力和离心力，地球为不旋转圆球时的再入弹道方程组，可由式(11－1.8)简化为

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{X}{m} \\ \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{Y}{mV} \\ \dfrac{dr}{dt} = V\sin\Theta \\ \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{RV}{r}\cos\Theta \end{cases} \tag{11-3.1}$$

方程组中第一式除以第二式，可得

$$\frac{dV}{V} = -\frac{X}{Y}d\Theta$$

在升阻比 $Y/X = \text{const}$ 下，从再入点到任一点积分上式，有

$$\ln\frac{V}{V_e} = -\frac{X}{Y}(\Theta - \Theta_e)$$

由上式得任一高度时的速度式

$$V = V_e e^{-\frac{X}{Y}(\Theta-\Theta_e)} \tag{11-3.2}$$

当顾及关系式

$$r = R + h$$

$$dt = \frac{dh}{V\sin\Theta}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$$

$$dh = -\frac{d\rho}{\beta\rho}$$

$$X = \frac{1}{2}C_x S_m \rho V^2$$

时，且将 dt 及 dh 代入(11.3.1)式中第二式，则有

$$-\sin\Theta d\Theta = \frac{1}{2}\frac{Y}{X}\frac{C_x S_m}{m\beta}d\rho$$

从再入点到任一点积分时，得

$$\cos\Theta - \cos\Theta_e = \frac{1}{2}\frac{Y}{X}\frac{C_x S_m}{m\beta}(\rho - \rho_e) \tag{11-3.3}$$

所以任一高度时的弹道倾角为

$$\Theta = \cos^{-1}\left[\cos\Theta_e + \frac{1}{2}\frac{Y}{X}\frac{C_x S_m}{m\beta}(\rho - \rho_e)\right] \tag{11-3.4}$$

将(11－3.2)和(11－3.3)式代入(11－3.1)中之第一式，便得再入体任一高度时的加速度式

$$\dot{V} = -\frac{X}{Y}\beta\left[\cos\Theta - \cos\Theta_e + \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{C_x S_m}{m\beta}\rho_e\right]V_e^2 e^{-2\left(\frac{X}{Y}\right)(\Theta-\Theta_e)} \tag{11-3.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

很显然,加速度 $\dot{V}$ 为弹道倾角 Θ 的函数。因此可用上式对 Θ 求极值的方法,获得相应于最大负加速度时的弹道倾角 Θ_m,于是当令

$$\frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}\Theta} = 0$$

时,即得满足上述极值条件的弹道倾角 Θ_m

$$2\left(\frac{X}{Y}\right)\left(\cos\Theta_m + \frac{1}{2}\frac{Y}{X}\frac{C_x S_m}{m\beta}\rho_e - \cos\Theta_e\right) = -\sin\Theta_m$$

对上式两边平方,并将右端改写成余弦函数,且令

$$\begin{cases} a = 2\dfrac{X}{Y} \\ b = \dfrac{1}{2}\dfrac{Y}{X}\dfrac{C_x S_m}{m\beta}\rho_e - \cos\Theta_e \\ c = a^2 b^2 - 1 \end{cases} \tag{11-3.6}$$

时,则得二次方程式

$$(a^2 + 1)\cos^2\Theta_m + 2ba^2\cos\Theta_m + c = 0 \tag{11-3.7}$$

由上式可解得

$$\cos\Theta_m = \frac{-ba^2 \pm \sqrt{1 + a^2(1 - b^2)}}{a^2 + 1} \tag{11-3.8}$$

或

$$\Theta_m = \cos^{-1}\left[\frac{-ba^2 \pm \sqrt{1 + a^2(1 - b^2)}}{a^2 + 1}\right] \tag{11-3.9}$$

式中负号"-"为对应于最大负加速度的弹道倾角值。

将(11-3.9)式代入(11-3.5)式,则最大负加速度式为

$$\dot{V}_m = -\frac{X}{Y}\beta\left(\cos\Theta_m - \cos\Theta_e + \frac{1}{2}\frac{Y}{X}\frac{C_x S_m}{m\beta}\rho_e\right)V_e^2 \mathrm{e}^{-2\left(\frac{X}{Y}\right)(\Theta_m - \Theta_e)} \tag{11-3.10}$$

由(11-3.1)之第一、二式以及(11-3.2)、(11-3.5)式不难导得关系式

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -\frac{Y}{X}\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{Y}{X}\frac{\dot{V}}{V_e \mathrm{e}^{-\frac{X}{Y}(\Theta_m - \Theta_e)}} \end{aligned} \tag{11-3.11}$$

显然,在升阻比 $Y/X = \mathrm{const}$,切向加速度 $\dot{V}$ 取极值 $\dot{V}_m$ 时,则其法向加速度 $V\dot{\Theta}$ 也必将取得极值,即

$$\dot{\Theta}_m = -\frac{Y}{X}\frac{\dot{V}_m}{V_e \mathrm{e}^{-\frac{X}{Y}(\Theta_m - \Theta_e)}} \tag{11-3.12}$$

利用(11-3.1)之第二、四式,且顾及 $r = R$ 时,不难求得

$$\mathrm{d}L = -\frac{\cos\Theta \mathrm{d}\Theta}{\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{C_x S_m}{m}\rho}$$

当用 ρ_e 近似代替 ρ,且将(11-3.6)第二式代入上式时,则有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$dL = \frac{\cos\Theta}{\beta(b+\cos\Theta)}d\Theta$$

从再入点积分到任一点时，则任一高度对应射程计算式为

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}(\Theta - \Theta_e) - \dfrac{2b}{\beta\sqrt{b^2-1}}\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-1}{b+1}}\mathrm{tg}\dfrac{\Theta}{2}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-1}{b+1}}\mathrm{tg}\dfrac{\Theta_e}{2}\right)\right] & (b^2 > 1) \\ \dfrac{1}{\beta}(\Theta - \Theta_e) - \dfrac{b}{\beta\sqrt{1-b^2}}\ln\left(\dfrac{1+b\cos\Theta+\sqrt{1-b^2}\sin\Theta}{1+b\cos\Theta_e+\sqrt{1-b^2}\sin\Theta_e}\cdot\dfrac{b+\cos\Theta_e}{b+\cos\Theta}\right) & (b^2 < 1) \end{cases} \tag{11-3.13}$$

由计算表明，当以小的再入角和负升阻比进行再入，且升阻比绝对值大于 0.3 时，上述解析计算结果才能接近于其精确数值解值。因此上述导得的解析计算式适用于升阻比绝对值大于 0.3 的情况下。

§11.4 再入机动弹道方程和最优制导律

11.4.1 再入机动弹道

再入机动弹道的涵义是指再入体重返大气层后，在承受一定阻力作用的同时，也产生一定比例的升力，且借助于升力的控制和调节，以便达到预期的再入弹道机动的目的。

再入机动弹道的出现，与反导武器系统和包括人造地球卫星在内的各类宇宙飞行器的出现相联系。众所周知，随着导弹武器射程和威力的不断增大与加强，其射击精度也越来越高，因而为对付导弹武器的核袭击，相应地就出现了反导武器的高、低空拦截系统。也正因为如此，反过来又要求弹道导弹必须具有高、低空的突防能力。目前，在高空突防上，较为通用的办法是释放诱饵的简单方法。由于高空时气动力很小，诱饵与弹头具有相同的运动特性，可以“鱼目混珠”、“以假乱真”地造成对方高空拦截失误，所以这种方法的高空突防效果较好，而在低空突防上就显得无能为力了。

为解决导弹的低空突防问题，目前有两种方案：其一是无升力陡峭再入方案，即再入体以较大的再入角高速穿越低空拦截区，以减小反导武器系统拦截的杀伤概率（图 11－2(a)）。另一种则是有升力（机动）平缓再入方案。这种再入方案的再入方式，可以是弹头进入低空拦截区时，利用弹道机动使低空反导武器系统产生较大的脱靶量（图 11－2(b)）；也可以是利用弹道机动，直接避开低空拦截区（图 11－2(c)）；或者利用弹道机动，直接避开高空和低空拦截区（图 11－2(d)）。

对于包括人造地球卫星在内的各类宇宙飞行器的再入大气层的弹道机动问题，通常有陡峭降落（图 11－3(a)），倾斜降落（图 11－3(b)），滑翔降落（图 11－3(c)）和起伏降落（图 11－3(d)）四种方式。

当弹头和包括人造卫星在内的各类宇宙飞行器采用陡峭再入时，由于再入速度很大，将产生较大的空气阻力、负加速度和过载，此时，必须考虑再入体的结构，仪器设备和宇航员允许过载限制问题，因而对具体的再入体就必须存在一个最大再入角 $\Theta_{e\max}$ 的限制问题。如果再入体是采用倾斜再入方式，因再入角的减小，却延长了再入时间，且再入角越

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

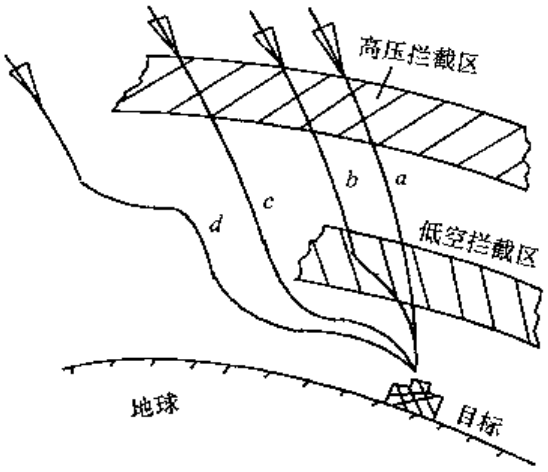


图 11 - 2

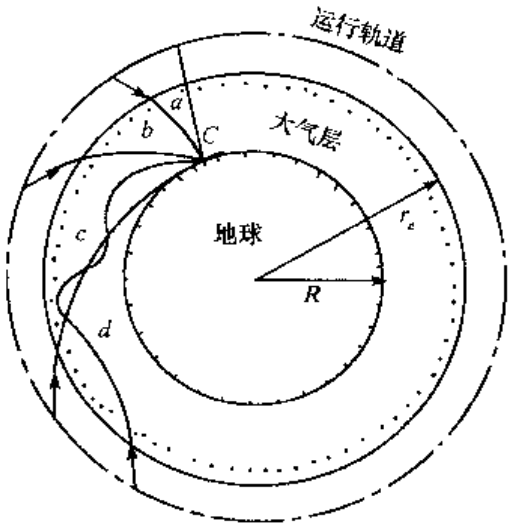


图 11 - 3

小,再入时间也就越长,这将出现再入体的大量动能转化为热能从而使再入体过热的危险,因而再入体也同时存在一个最小再入角 $\Theta_{e\min}$ 的限制问题。由此可见,依据上述过载和过热条件的限制,再入体的再入角 Θ_e 将存在上下两个极限值,即

$$|\Theta_{e\min}| \leqslant |\Theta_e| \leqslant |\Theta_{e\max}|$$

这就是所谓的"再入安全走廊",如图 11 - 4 所示。不言而喻,"再入安全走廊"的宽度与再入体的特征、大气层边界、再入速度以及再入方式等因素有关。

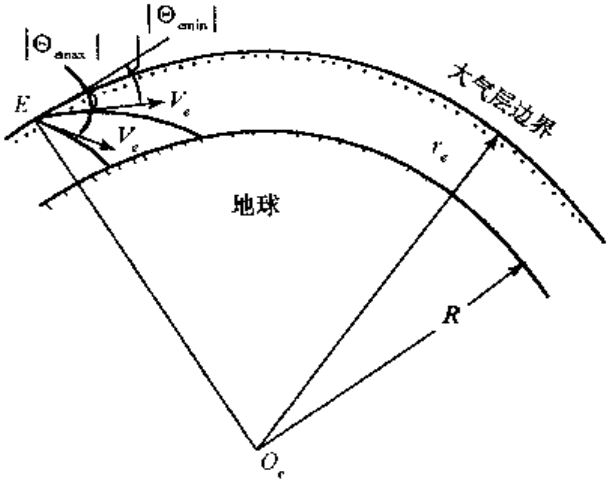


图 11 - 4

导弹弹头的机动再入或各类宇宙飞行器的降落,都是通过改变整个再入段的弹道倾角,以期达到避开反导武器系统的拦截或减轻过载以及过热的目的。这种再入弹道的控制主要是依靠气动力的调节方式来实现的,其中一种行之有效的方法则是气动升力大小和方向的控制与调节。美国研究成功的潘兴 Ⅱ 型战术弹道导弹,就是依靠安装在裙部外面的四个三角形空气舵的摆动,控制其再入大气层后的机动变轨飞行的。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

潘兴 II 导弹比一般的导弹弹道复杂的多。导弹起飞前必须做好诸元准备，将其包括飞行程序，关机装订值，图像匹配的相关原图信息等预先装订在弹载计算机内。起飞后的导弹在制导和控制系统作用下，实现其稳定飞行、发动机关机、级间分离和头体分离等。分离后的弹头由冷气反作用姿态控制系统对姿态进行控制，使弹道最高点可达 300km 左右，而导弹再入大气层后的飞行则由空气舵实现姿态控制。当弹头到达目标上空约 40km 高度时，开始弹道拉起，在惯性制导控制下进行减速控制(亦称攻角控制)。平飞一段后再进行所谓的锥形运动，对导弹速度大小和方向进行控制，使弹道下拉，且接近于垂直状态。为满足雷达相关器工作时的要求和弹头撞击地面速度的限制，在距离地面 900m 之前用锥形运动进一步减慢其运动速度。

潘兴 II 导弹的再入段运动采用了惯性 + 地形匹配的末制导系统，利用雷达区域相关器和高度表的测量信息修正惯性制导的位置误差。当导弹达到 15km 高度，雷达有足够功率测高时，先进行测高和进行几次高度修正，然后雷达开始对地面敏感图像，计算机将经过高度修正的雷达图像回波信号转换成数字图像，经过相关器信息的匹配处理，提供相对目标的位置修正指令，导引弹头飞向目标(一般修正三次以上)，直到距离地面 900m 高度为止。尔后的弹头依靠旋转抛撒子弹头(图 11 - 5)。

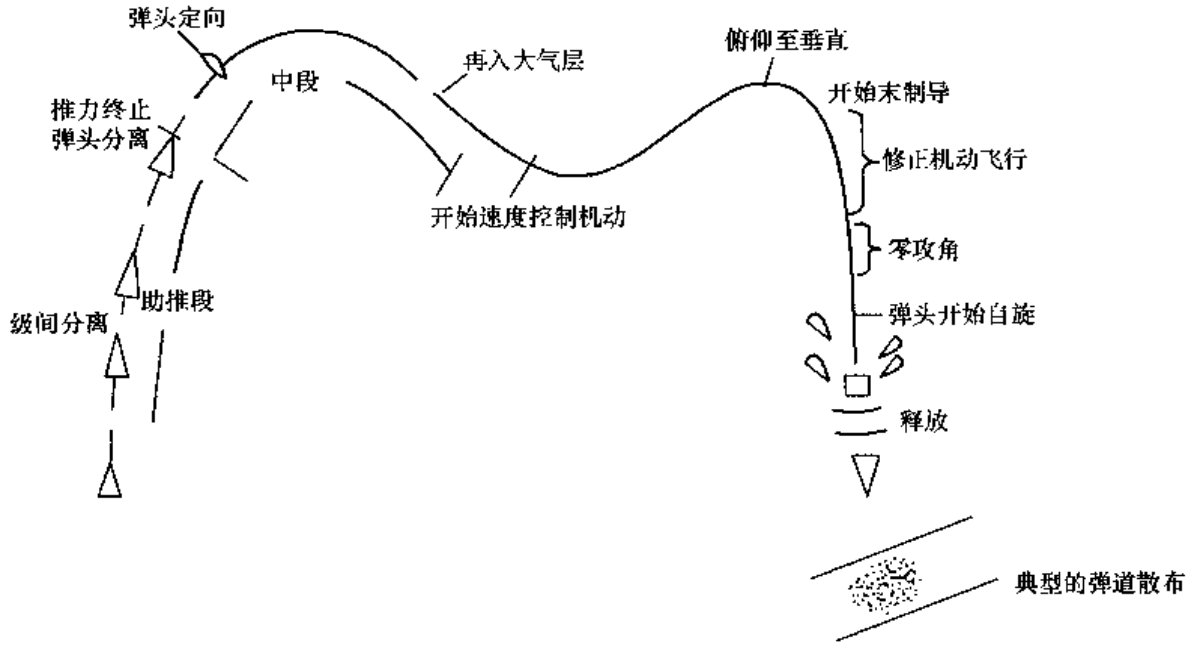


图 11 - 5

机动弹头分为躲避型和高级型两种。躲避型机动弹头是按飞行程序机动飞行的，所以对因干扰存在而产生的落点偏差不能进行修正。而以提高精度为主的高级机动弹头，为使精确的命中目标必须对速度方向进行控制，因此当干扰存在时，要求用闭路制导方案以修正由此引起的落点偏差。对落点速度方向无控制要求的弹头，可采用一般的比例导引法将其导向目标。而对落地速度方向有要求时，则不能用一般的比例导引法，必须应用最优控制理论导出的最优比例导引规律进行再入末制导控制。下面对最优比例导引规律的有关问题进行讨论。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

11.4.2 坐标系及其转换矩阵

在尚未讨论再入运动方程和最优比例导引规律前，先定义需要的坐标系及其转换矩阵。

1. 目标坐标系$[T](o_Tx_Ty_Tz_T)$

该坐标系的原点取目标点 o_T；o_Ty_T 轴取过目标点的法线，指向上为正；o_Tx_T 轴在过目标点的水平面内，指向基准线的正方向（如指向目标点 o_T 所在子午面的正北方向）；o_Tz_T 轴与 o_Tx_T 及 o_Ty_T 轴构成右手直角坐标系（图 11 - 6）。

2. 视线坐标系$[\xi](o_T\xi\eta\zeta)$

该坐标系的坐标原点也取在目标点 o_T；$o_T\xi$ 轴沿目标点指向导弹质心 o_c 的连线（目标视线）；$o_T\zeta$ 轴在目标坐标系 $o_Tx_Tz_T$ 平面内，垂直于 $o_T\xi$ 轴，指向右边为正；$o_T\eta$ 轴与 $o_T\xi$ 轴及 $o_T\zeta$ 轴构成右手直线坐标系。该坐标系亦称控制坐标系或导引坐标系（图 11 - 6）。

3. 坐标系间关系矩阵

(1) 目标坐标系与视线坐标系间的关系矩阵

应用坐标系旋转方法即可方便地得到目标坐标系与视线坐标系间的关系矩阵，且由方位角 λ_T 和高低角 λ_D 将两坐标系联系起来。方位角 λ_T 是指目标视线 $o_T\xi$ 在水平面 $o_Tx_Tz_T$ 内的投影与 o_Tx_T 间的夹角，其投影在 o_Tx_T 轴左边时，λ_T 定义为正，反之为负。高低角 λ_D 则是目标视线 $o_T\xi$ 轴与水平面间的夹角，且目标线在水平面上方时，λ_D 定义为正，反之为负（图 11 - 6）。

由图看出，视线坐标系与目标坐标系间关系矩阵式为

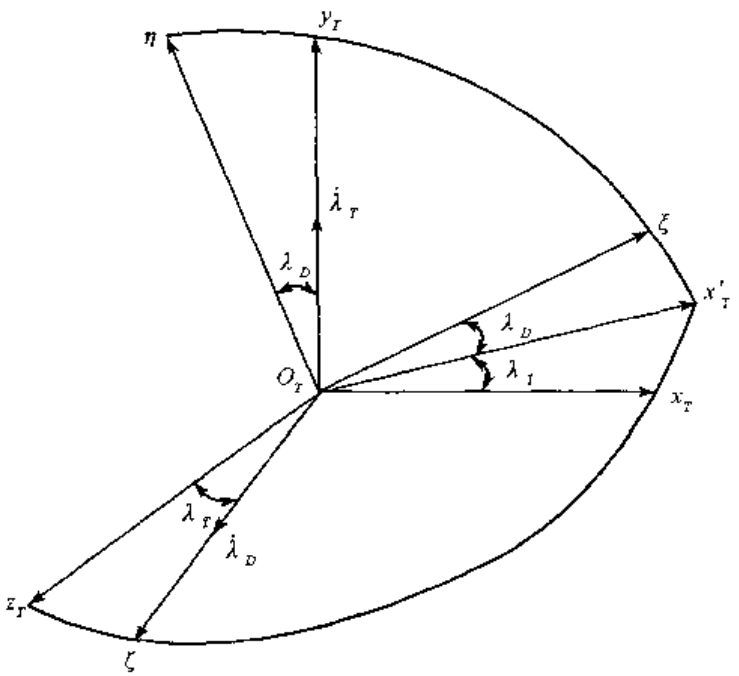


图 11 - 6

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases}[\xi] = \boldsymbol{B}_T^{\xi}[x_T] \\ \boldsymbol{B}_T^{\xi} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_D\cos\lambda_T & \sin\lambda_D & -\cos\lambda_D\sin\lambda_T \\ -\sin\lambda_D\cos\lambda_T & \cos\lambda_D & \sin\lambda_D\sin\lambda_T \\ \sin\lambda_T & 0 & \cos\lambda_T \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11-4.1}$$

若将 x_T 轴定义为沿过目标点子午线的切线指向北方向，方位角 λ_T 从子午线起顺时针旋转定义为正，则矩阵 B_T^{ξ} 为

$$\boldsymbol{B}_T^{\xi} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_D\cos\lambda_T & \sin\lambda_D & \cos\lambda_D\sin\lambda_T \\ -\sin\lambda_D\cos\lambda_T & \cos\lambda_D & -\sin\lambda_D\sin\lambda_T \\ -\sin\lambda_T & 0 & \cos\lambda_T \end{bmatrix} \tag{11-4.2}$$

(2) 目标坐标系与轨迹坐标系间关系矩阵

在建立目标坐标系与轨迹坐标系间关系矩阵时，可认为轨迹坐标系是由目标坐标系按 2－3 顺序(即先绕 y_T 轴旋转，再绕 z_2 轴)旋转得到的，因此两坐标系间关系矩阵可直接导得

$$\begin{cases}[x_2] = \boldsymbol{B}_T^2[x_T] \\ \boldsymbol{B}_T^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_T\cos\sigma_T & \sin\theta_T & -\sin\sigma_T\cos\theta_T \\ -\cos\sigma_T\sin\theta_T & \cos\theta_T & \sin\sigma_T\sin\theta_T \\ \sin\sigma_T & 0 & \cos\sigma_T \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11-4.3}$$

其中，θ_T 和 σ_T 分别为导弹速度矢 $\boldsymbol{V}$ 相对目标坐标系的弹道倾角和弹道偏角。

(3) 目标坐标系与发射坐标系间关系矩阵

应用北东坐标系与发射坐标系关系矩阵(参见附录 2)，便可直接导出目标坐标系与发射坐标系间关系矩阵

$$\begin{cases}[x_T] = \boldsymbol{B}_g^T[x] \\ \boldsymbol{B}_g^T = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_m\cos\Delta\lambda & -\sin\varphi_m\sin\Delta\lambda & \cos\varphi_m \\ \cos\varphi_m\cos\Delta\lambda & \cos\varphi_m\sin\Delta\lambda & \sin\varphi_m \\ -\sin\Delta\lambda & \cos\Delta\lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{D}' \end{cases} \tag{11-4.4}$$

其中

$$\begin{cases} D' = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{bmatrix} \\ d'_{11} = -\sin B_T\cos A_T \\ d'_{12} = \cos B_T \\ d'_{13} = \sin B_T\sin A_T \\ d'_{21} = \sin A_T \\ d'_{22} = 0 \\ d'_{23} = \cos A_T \\ d'_{31} = \cos B_T\cos A_T \\ d'_{32} = \sin B_T \\ d'_{33} = -\sin A_T\cos B_T \end{cases} \tag{11-4.5}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

B_T、A_T、L_T 分别为发射点天文(大地)纬度、经度和天文(大地)方位角；φ_m，λ_m 分别为目标点地心纬度和地心经度；$\Delta\lambda = \lambda_m - L_T$ 为目标点与发射点经度差。

11.4.3 空间比例导引和导引平面

比例导引法的实质是指机动弹头速度方向变化率与视线转动角速度成比例的变化，其一般表达形式为

$$\frac{d\theta}{dt} = K\frac{d\xi}{dt}$$

式中

θ 为机动弹头速度 V 与基准线的夹角；

ξ 为视线与基准线间的夹角；

K 为导航参数。

对空间机动飞行的弹头进行比例导引时有两种方案，即在两个相互垂直的平面内对其进行比例导引控制和利用一个控制通道将弹头控制在瞬时导引平面内实施比例导引控制。下面仅对第一种比例导引控制方案进行讨论。

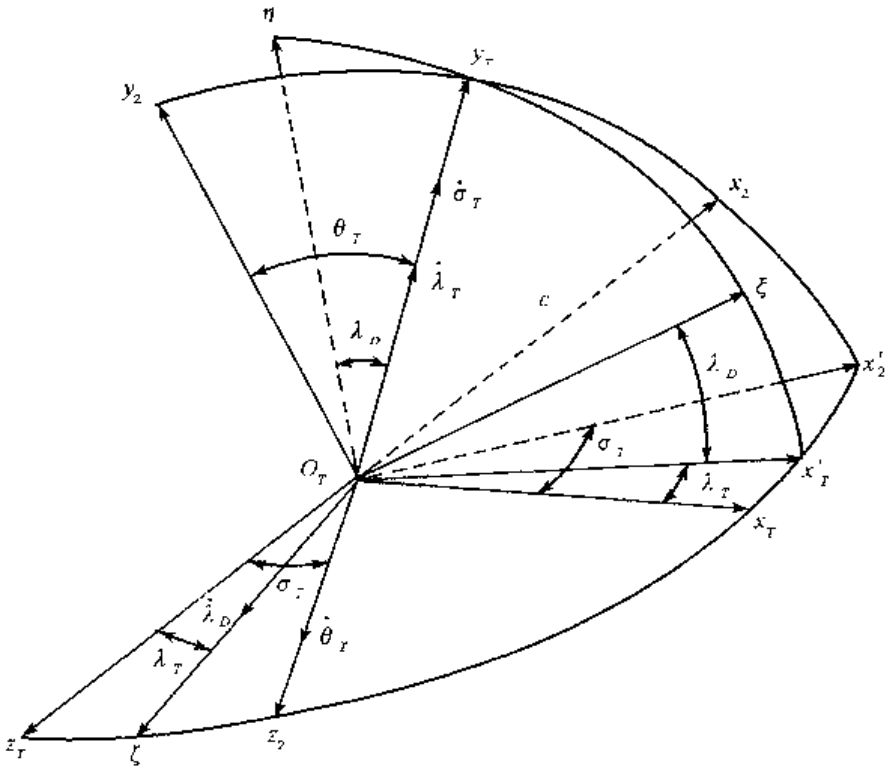


图 11 - 7

如图 11 - 7 所示，o_T 为目标点，c 为导弹。由图知，视线转动角速度 ω_s 可用视线坐标系三个坐标轴上的分量表示，即

$$\omega_S = \omega_\xi + \omega_\eta + \omega_\zeta = \dot{\lambda}_T\sin\lambda_D\xi^\circ + \dot{\lambda}_T\cos\lambda_D\eta^\circ + \dot{\lambda}_D\zeta^\circ \qquad (11-4.6)$$

而导弹速度矢 V 转动角速度 ω_v 在视线坐标系各轴上的分量，可借助于轨迹坐标系与目标

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

坐标系关系矩阵和目标坐标系与视线坐标系间关系矩阵求得，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_v = \dot{\boldsymbol{\theta}}_T + \dot{\boldsymbol{\sigma}} = &[\dot{\theta}_T\sin(\sigma_T - \lambda_T)\cos\lambda_D + \dot{\sigma}_T\sin\lambda_D]\boldsymbol{\xi}^\circ + \\ &[-\dot{\theta}_T\sin(\sigma_T - \lambda_T)\sin\lambda_D + \dot{\sigma}_T\cos\lambda_D]\boldsymbol{\eta}^\circ + \dot{\theta}_T\cos(\sigma_T - \lambda_T)\boldsymbol{\zeta}^\circ\end{aligned} \tag{11-4.7}$$

因为 ω_ξ 为视线转动角速度矢在视线轴上的分量，由姿态控制系统通过滚动控制可使 $\omega_\xi = 0$，因此不予考虑，而只分别对 ω_ζ 及 ω_η 进行比例导引控制。

比较(11-4.6)式与(11-4.7)式，得

$$\begin{cases}\dot{\theta}_T\cos(\sigma_T - \lambda_T) = K_\zeta\dot{\lambda}_D \\ \dot{\sigma}_T\cos\lambda_D - \dot{\theta}_T\sin(\sigma_T - \lambda_T)\sin\lambda_D = K_\eta\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\dot{\sigma}_T = K_\eta\dot{\lambda}_T + \dfrac{K_\zeta\,\mathrm{tg}\lambda_D\sin(\sigma_T - \lambda_T)}{\cos(\sigma_T - \lambda_T)} \\ \dot{\theta}_T = \dfrac{K_\zeta}{\cos(\sigma_T - \lambda_T)}\dot{\lambda}_D\end{cases} \tag{11-4.8}$$

在近似情况下，可取

$$\begin{cases}\dot{\theta}_T = K_\zeta\dot{\lambda}_D \\ \dot{\sigma}_T = K_\eta\dot{\lambda}_T\end{cases} \tag{11-4.9}$$

其中，K_ζ 及 K_η 为比例导航参数。

美国的潘兴Ⅱ战术弹道导弹为了提高命中精度，根据比例导引思想，在再入段控制中，采用了末制导图像匹配系统。为了满足雷达相关器工作的要求，必须尽快降低再入飞行速度，且在接近目标时使弹道接近于垂直下降状态，即落地倾角近似等于 $\theta_F = -90°$。因此对空间运动的机动弹头必须在两个相互垂直的平面内进行控制。由目标视线与 y_T 轴所决定的垂直于 $o_Tx_Tz_T$ 平面的平面称为俯冲平面，而视线坐标系中的 $o_T\xi\zeta$ 平面称为转弯平面。视线坐标系与目标坐标系的关系由 λ_D、λ_T 来确定，导弹飞行速度 $\boldsymbol{V}$ 与视线坐标系的关系由 q_D、q_T 来描述(图 11-8)。当选择视线坐标系为控制坐标系，且令速度矢 $\boldsymbol{V}$ 转动角速度在视线坐标系各轴上的投影为 $\dot{\gamma}_\xi$、$\dot{\gamma}_T$、$\dot{\gamma}_D$ 时，由(11-4.7)式得

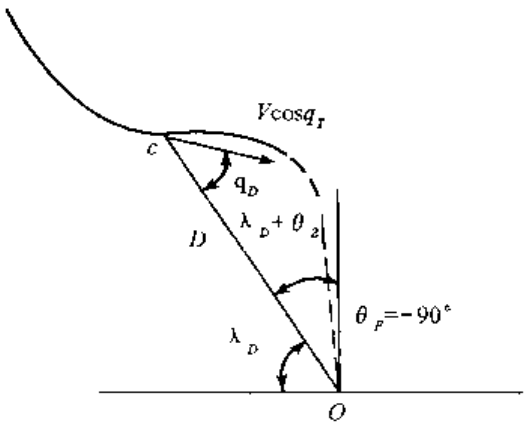


图 11-8

$$\begin{cases}\dot{\gamma}_\xi = \dot{\theta}_T\sin(\sigma_T - \lambda_T)\cos\lambda_D + \dot{\sigma}_T\sin\lambda_D \\ \dot{\gamma}_T = -\dot{\theta}_T\sin(\sigma_T - \lambda_T)\sin\lambda_D + \dot{\sigma}_T\cos\lambda_D \\ \dot{\gamma}_D = \dot{\theta}_T\cos(\sigma_T - \lambda_T)\end{cases} \tag{11-4.10}$$

若视线旋转角速度矢在视线坐标系各轴上的投影为 $\dot{\lambda}_\xi$、$\dot{\lambda}_{TT}$、$\dot{\lambda}_D$，由(11-4.6)式则得

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_\xi = \dot{\lambda}_T\sin\lambda_D \\ \dot{\lambda}_{TT} = \lambda_T\cos\lambda_D \\ \dot{\lambda}_D = \dot{\lambda}_D\end{cases} \tag{11-4.11}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

当采用比例导引法控制弹头时，由(11－4.9)式便得机动弹头空间运动导引控制解一般式

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_T &= K_\gamma \dot{\lambda}_{TT}\\ \dot{\gamma}_D &= K_\xi \dot{\lambda}_D\end{aligned} \qquad (11-4.12)$$

11.4.4 俯冲平面内最优导引控制规律

由图 11－8 知，机动弹头至目标的距离为 D，速度矢 $\boldsymbol{V}$ 在俯冲平面内的投影为 $V\cos q_T$，$V\cos q_T$ 与视线夹角为 q_D。为了实现比例导引和抑制视线的转动应使得(11－4.12)式中第二式改为

$$\dot{\gamma}_{D1} = K_\xi \dot{\lambda}_D \qquad (11-4.13)$$

另外，还要满足弹头垂直下降的要求(即 $\theta_F = -90°$)，则还必须使视线旋转，且令其旋转角速度为

$$\dot{\gamma}_{D2} = K\frac{(\lambda_D + \theta_F)}{T_g} = -K\frac{\dot{D}}{D}(\lambda_D + \theta_F) \qquad (11-4.14)$$

式中 $T_g = -\dfrac{D}{\dot{D}}$ 为导弹飞行至目标的时间。

因此俯冲平面内的制导律为

$$\dot{\gamma}_{D1} + \dot{\gamma}_{D2} = K_\xi \dot{\lambda}_D - K\frac{\dot{D}}{D}(\lambda_D + \theta_F) \qquad (11-4.15)$$

从(11－4.13)和(11－4.14)式看出，$\dot{\gamma}_{D1}$ 是抑制视线转动的，而 $\dot{\gamma}_{D2}$ 则是需要视线旋转来满足导弹垂直击中目标要求的，两者要求相互矛盾，因此如何适当的选择 K_ξ 及 K 则是确定导引规律的关键。下面应用最优控制理论来讨论导航参数 K_ξ 及 K 以及最优导引规律的问题。

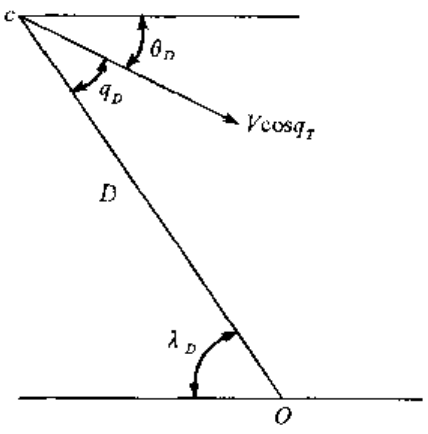


图 11－9

由图 11－9 知

$$\begin{cases}\dot{D} = -V\cos q_T \cos q_D\\ \dot{\lambda}_D = \dfrac{V\cos q_T \sin q_D}{D}\\ \lambda_D = q_D - \theta_D\end{cases} \qquad (11-4.16)$$

微分式(11－4.16)中第二式

$$\ddot{\lambda}_D = \frac{\dot{V}\cos q_T \sin q_D}{D} - \frac{V\cos q_T \cos q_D}{D}\dot{q}_D - \frac{\dot{D}V\cos q_T \sin q_D}{D^2}$$

且将式(11－4.16)中第一，二式及第三式微分

$$\dot{\lambda}_D = \dot{q}_D - \dot{\theta}_D$$

代入上式，便得俯冲平面内弹头相对运动方程

$$\ddot{\lambda}_D = \left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)\dot{\lambda}_D - \frac{\dot{D}}{D}\dot{\theta}_D \qquad (11-4.17)$$

取终端约束条件为视线角 λ_D 与要求的速度倾角 θ_F 相等，视线转动角速度为零，则上式终

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

端条件为

$$\begin{cases}\lambda_D(t_f) = -\theta_F \\ \dot{\lambda}_D(t_f) = 0\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}x_1 = \lambda_D + \theta_F \\ x_2 = \dot{\lambda}_D \\ u = \dot{\theta}_D\end{cases}$$

则状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\dfrac{\dot{V}}{V} - 2\dfrac{\dot{D}}{D})x_2 - \dfrac{\dot{D}}{D}u\end{cases} \tag{11-4.18}$$

终端和初始条件

$t = t_0$ 时　　$x_1(t_0) = \lambda_D(t_0) + \theta_F$

$x_2(t_0) = \dot{\lambda}_D(t_0)$

$t = t_f$ 时　　$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$

记

$$\begin{cases}\boldsymbol{X} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\dot{V}}{V} - 2\dfrac{\dot{D}}{D}\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\dot{D}}{D}\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{U} = \dot{\theta}_D\end{cases} \tag{11-4.19}$$

则(11-4.18)式的矢量式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BU} \\ \boldsymbol{X}(t_f) = 0\end{cases} \tag{11-4.20}$$

这是一个非齐次变系数微分方程组，其中 $\boldsymbol{X}$ 为状态变量，$\boldsymbol{U}$ 为控制变量。

当终端约束条件为射程一定，对落地速度倾角有要求时，其性能指标应是什么呢？由于机动弹头对落地倾角大小有要求，对落地速度大小也有要求，因此在最优导引规律研究中应该使速度损失尽量地小，以便有较富裕的速度用来减小速度，否则只能满足落地速度较小时的要求，而不能满足落地速度较大的要求。弹头落速的大小主要取决于诱导阻力的大小，而诱导阻力大小又近似与攻角 α^2 成比例。攻角 α 又可近似地看成与 $\dot{\gamma}_D^2$ 大小成比例，所以对速度损失的要求，即是对 $\int_0^{t_f}\dot{\gamma}_D\mathrm{d}t$ 的要求，因此求解导弹再入机动导引规律的性能指标取为最优控制问题中的典型的二次型性能指标

$$J = \boldsymbol{X}^T(t_f)\boldsymbol{FX})(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\dot{\gamma}_D^2\mathrm{d}t \tag{11-4.21}$$

式中 $\boldsymbol{X}^T(t_f)\boldsymbol{FX})(t_f)$ 称为补偿系数，$\boldsymbol{F}$ 为一个对称半正定常值矩阵。因要求终端时刻

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$\boldsymbol{X}(t_f) = 0$,故 $\boldsymbol{F} \to \infty$。

根据极大值原理,线性系统二次型性能指标的最优控制为

$$\boldsymbol{U}^* = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{X} \tag{11-4.22}$$

当线性指标为(11-4.22)式时,$\boldsymbol{R} = 1, \boldsymbol{U}^* = \dot{\gamma}_D$ 于是

$$\dot{\gamma}_D = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{X} \tag{11-4.23}$$

其展开式

$$\dot{\gamma}_D = -\begin{bmatrix}0 & -\frac{\dot{D}}{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \frac{\dot{D}}{D}(P_{12}x_1 + P_{22}x_2) \tag{11-4.24}$$

式中,$\boldsymbol{P}$ 为满足逆黎卡提方程的矩阵。因 $\boldsymbol{F} \to \infty$,故要求解逆黎卡提方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}}^{-1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = 0\\ \boldsymbol{P}^{-1}(t_f) = \boldsymbol{F}^{-1} = 0\end{cases} \tag{11-4.25}$$

令

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}$$

则

$$\dot{\boldsymbol{P}}^{-1} = \begin{bmatrix}\dot{q}_{11} & \dot{q}_{12}\\ \dot{q}_{21} & \dot{q}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & \frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \left(\frac{\dot{D}}{D}\right)^2\end{bmatrix} \tag{11-4.26}$$

因 $q_{12} = q_{21}$,故

$$\begin{cases}\dot{q}_{11} = 2q_{12}\\ \dot{q}_{12} = q_{22} + \left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)q_{12}\\ \dot{q}_{22} = 2\left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)q_{22} - \left(\frac{\dot{D}}{D}\right)^2\end{cases} \tag{11-4.27}$$

下面分别求解(11-4.27)式。

将自变量 t 变换成 D,则上式中的第三式左边

$$\frac{\mathrm{d}q_{22}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_{22}}{\mathrm{d}D}\dot{D}$$

将其代入(11-4.27)式,且消去 $\dot{D}$

$$\frac{\mathrm{d}q_{22}}{\mathrm{d}D} = 2\left(\frac{\dot{V}}{\dot{D}V} - 2\frac{1}{D}\right)q_{22} - \frac{\dot{D}}{D^2} \tag{11-4.28}$$

微分式

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{D^4}{V^2}q_{22}\right)}{\mathrm{d}D} = \frac{D^4}{V^2}\frac{\mathrm{d}q_{22}}{\mathrm{d}D} - 2\frac{D^4}{V^3}\frac{V}{\dot{D}}q_{22} + 4\frac{D^3}{V^2}q_{22}$$

且与(11-4.28)式两端同乘以 $\frac{D^4}{V^2}$ 后进行比较得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left(\frac{D^4}{V^2}q_{22}\right) = -\frac{D^2\dot{D}}{V^2} \tag{11-4.29}$$

当近似认为$\frac{\dot{D}}{V^2}$ = 常值，且顾及终端约束 $q_{22}(t_f) = 0, D(t_f) = 0$时，则(11-4.29)式积分为

$$q_{22} = -\frac{1}{3}\frac{\dot{D}}{D} \tag{11-4.30}$$

将(11-4.30)式代入(11-4.27)第一式中的第二式及

$$\dot{q}_{12} = \left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)q_{12} - \frac{1}{3}\frac{\dot{D}}{D}$$

采用类似(11-4.30)式推导方法，将自变量 t 变换成 D，消去 $\dot{D}$，上式两端同乘以$\frac{D^2}{V}$，且与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left(\frac{D^2}{V}q_{12}\right)$微分式比较，则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left(\frac{D^2}{V}q_{12}\right) = \frac{D}{3V} \tag{11-4.31}$$

近似认为 V = 常数，$q_{12}(t_f) = 0, D(t_f) = 0$，故积分上式得

$$q_{12} = -\frac{1}{6} \tag{11-4.32}$$

将(11-4.32)式代入(11-4.27)式，且积分

$$q_{11} = -\frac{D}{3\dot{D}} \tag{11-4.33}$$

故得逆矩阵

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{D}{3\dot{D}} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{\dot{D}}{3D} \end{bmatrix} \tag{11-4.34}$$

和矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -\frac{4\dot{D}}{D} & 2 \\ 2 & -\frac{4D}{\dot{D}} \end{bmatrix} \tag{11-4.35}$$

将 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}^T$ 及 $\boldsymbol{X}$ 代入(11-4.23)式，便得俯冲平面内最优导引制导规律

$$\dot{\gamma}_D = 2\frac{\dot{D}}{D}x_1 - 4x_2 = 2\frac{\dot{D}}{D}(\lambda_D + \theta_F) - 4\dot{\lambda}_D \tag{11-4.36}$$

其一般形式

$$\dot{\gamma}_D = K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{LD}\frac{\dot{D}}{D}(\gamma_T + \gamma_{DF}) \tag{11-4.37}$$

K_{GD}, K_{LD} 为由最优化理论导出的有关导航参数，γ_{DF} 为末端所要求的速度倾角。

从(11-4.36)式或(11-4.37)式看出，为精确命中目标和使速度损失尽量小的导引律相当于比例导航参数为4的比例导引法。由于终端有约束，它增加了终端约束项以保证

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

命中目标时速度方向满足给定要求。

11.4.5 转弯平面内的最优导引控制规律

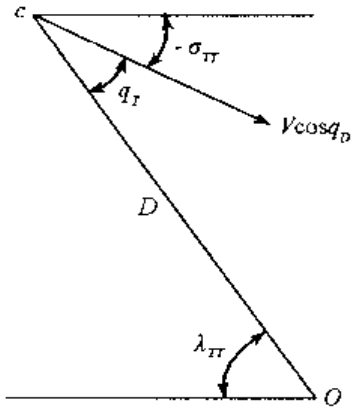


图 11 - 10

转弯平面内的最优导引控制规律的推导,可采用俯冲平面内最优导引控制规律的类似方法进行。

若导弹速度矢在转弯平面内的投影为 $V\cos q_D$,$V\cos q_D$ 与视线夹角为 q_T(图 11 - 10),则

$$\begin{cases}\dot{D} = -V\cos q_T\cos q_D \\ \dot{\lambda}_{TT} = V\cos q_D\sin q_T \\ \lambda_{TT} = q_T - \sigma_{TT}\end{cases} \tag{11-4.38}$$

将上式中第一,二式及第三式微分

$$\dot{\lambda}_{TT} = \dot{q}_T - \dot{\sigma}_{TT}$$

代入微分式 $\ddot{\lambda}_{TT}$,则得转弯平面内相对运动方程为

$$\ddot{\lambda}_{TT} = \left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)\dot{\lambda}_{TT} - \frac{\dot{D}}{D}\dot{\sigma}_{TT} \tag{11-4.39}$$

如果弹头击中目标时,仅要求 $\dot{\lambda}_{TT}(t_f) = 0$,而对 $\lambda_{TT}(t_f)$ 不作具体要求,这就意味着只要求弹头落地速度方向为 θ_F,但没有要求从什么方向进入,即 $\lambda_{TT}(t_f)$ 为自由,故上式终端约束条件为

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_{TT}(t_f) = 0 \\ \lambda_{TT}(t_f) = \text{自由}\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{X} = \dot{\lambda}_{TT}$,$\boldsymbol{U} = \dot{\sigma}_{TT}$,$\boldsymbol{A} = \dfrac{\dot{V}}{V} - 2\dfrac{\dot{D}}{D}$,$\boldsymbol{B} = -\dfrac{\dot{D}}{D}$

则状态方程矢量式为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BU} \tag{11-4.40}$$

因为状态方程为一维,可省去矢量符号。与俯冲平面内最优导引规律研究方法相同,取性能指标

$$J = X^T(t_f)FX(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} U^2\mathrm{d}t \tag{11-4.41}$$

因要求 $X(t_f) = 0$,故 $F \to \infty$,因此,$\dot{\gamma}_T = U^*$. 由二次型性能指标可直接得最优控制

$$\boldsymbol{U}^* = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{PX}$$

于是

$$\dot{\gamma}_T = -B^TPX$$

即

$$\dot{\gamma}_T = -\frac{\dot{D}}{D}PX \tag{11-4.42}$$

式中 P 可由逆黎卡提方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}^{-1} - \boldsymbol{AP}^{-1} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{BB}^T = 0$$

求得。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将 A，B 代入上式得

$$\dot{P}^{-1} - 2\left(\frac{\dot{V}}{V} - 2\frac{\dot{D}}{D}\right)P^{-1} + \left(\frac{\dot{D}}{D}\right)^2 = 0 \tag{11-4.43}$$

上式为一阶微分方程，当 $\frac{\dot{V}}{V} \approx 0$ 时可直接积分求出 P^{-1}，亦可采用(11-4.30)式类似推导方法求取。上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left(\frac{D^4}{V^2}P^{-1}\right) + \frac{D^2\dot{D}}{V^2} = 0$$

积分得

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\frac{\dot{D}}{D}$$

所以

$$P = (P^{-1})^{-1} = -\frac{3D}{\dot{D}} \tag{11-4.44}$$

将其代入(11-4.42)式，故得

$$\dot{\gamma}_T = -3\dot{\lambda}_{TT} \tag{11-4.45}$$

上式即为再入机动弹头转弯平面内最优控制规律。由此看出，它就相当于导航参数为3的比例导引。

将(11-4.11)式中第二式 $\dot{\lambda}_{TT}$ 代入(11-4.45)式有

$$\dot{\gamma}_T = -3\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D \tag{11-4.46}$$

写成一般式

$$\dot{\gamma}_T = K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D \tag{11-4.47}$$

K_{GT} 为转弯平面内最优比例导引控制规律导航参数。

11.4.6 再入机动弹道质心运动方程

1. 质心运动方程

假设地球为不旋转的圆球体，无姿态控制发动机推力作用，只考虑空气动力和地球引力时的机动弹头相对轨迹坐标系的质心运动方程为

$$\begin{cases} \dot{V}_T = \dfrac{R_{x_2}}{m} + g_{x_2} \\ \dot{\theta}_T = \dfrac{R_{y_2}}{mV} + \dfrac{g_{y_2}}{V} \\ \dot{\sigma}_T = \dfrac{R_{z_2}}{mV\cos\theta_T} + \dfrac{g_{z_2}}{V} \\ \dot{x}_T = V\cos\theta_T\cos\sigma_T \\ \dot{y}_T = V\sin\theta_T \\ \dot{z}_T = -V\cos\theta_T\sin\sigma_T \\ V_T = \left(V_{x_T}^2 + V_{y_T}^2 + V_{z_T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ r = \left[x_T^2 + (y_T + R)^2 + z_T^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{11-4.48}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中,空气动力矢在轨迹坐标系各轴上的投影

$$\begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \\ R_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} qS_m \tag{11-4.49}$$

$$q = \frac{1}{2}\rho V_T^2 \tag{11-4.50}$$

地球引力矢在轨迹坐标系各轴上的投影

$$\begin{bmatrix} g_{x_2} \\ g_{y_2} \\ g_{z_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_T^2 \begin{bmatrix} g_{x_T} \\ g_{y_T} \\ g_{z_T} \end{bmatrix} \tag{11-4.51}$$

$$\begin{bmatrix} g_{x_T} \\ g_{y_T} \\ g_{z_T} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} \frac{x_T}{r} \\ \frac{y_T + R}{r} \\ \frac{z_T}{r} \end{bmatrix} \tag{11-4.52}$$

$$g = -g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{11-4.53}$$

C_x、C_y、C_z 分别为空气阻力系数、升力系数和侧力系数,S_m 为机动弹头最大横截面积,q 为速度头(或速压),ρ 为大气密度,R 为地球平均半径,r 为弹头质心至地心距离,$\boldsymbol{B}_T^2$ 为轨迹坐标系与目标坐标系间转换矩阵。

2. 导引方程

为了命中目标和控制末速度方向,那么俯冲平面内和转弯平面内的最优导引规律方程由(11-4.37)和(11-4.47)式给出

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_D = K_{GD}\dot{\lambda}_D + K_{ID}(\lambda_D + \gamma_{DF})/T_g \\ \dot{\gamma}_T = K_{GT}\dot{\lambda}_T\cos\lambda_D \end{cases} \tag{11-4.54}$$

其中

$$\begin{cases} T_g = -\dfrac{D}{\dot{D}} = -\dfrac{D}{V_\xi} \\ \lambda_D = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y_T}{\sqrt{x_T^2 + z_T^2}}\right) \\ \lambda_T = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{-z_T}{x_T}\right) \\ \dot{\lambda}_T = \dfrac{V\zeta}{D\cos\lambda_D} \\ \dot{\lambda}_D = \dfrac{V_\eta}{D} \\ D = (x_T^2 + y_T^2 + z_T^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{11-4.55}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

V_ξ、V_η、V_ζ 为 $\boldsymbol{V}$ 在视线坐标系各轴上的投影，由(11－4.1)式求得，即

$$\begin{bmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_\zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_T^\xi \begin{bmatrix} V_{x_T} \\ V_{y_T} \\ V_{z_T} \end{bmatrix} \tag{11－4.56}$$

3. 攻角和侧滑角方程

对机动弹头再入飞行过程中的速度控制，既要保证在无干扰情况下精确命中目标，又要保证末速度有一定方向。为求解上述方程，应在已知弹头导引规律基础上确定飞行中的攻角 α 及侧滑角 β 的变化规律。

由式(11－4.10)知

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_T = \dot{\sigma}_T \cos\lambda_D - \dot{\theta}_T \sin\lambda_D \sin(\sigma_T - \lambda_T) \\ \dot{\gamma}_D = \dot{\theta}_T \cos(\sigma_T - \lambda_T) \end{cases}$$

求解上式可得

$$\begin{cases} \dot{\theta}_T = \dfrac{\dot{\gamma}_D}{\cos((\sigma_T - \lambda_T)} \\ \dot{\sigma}_T = \dfrac{1}{\cos\lambda_D}[\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}_D \mathrm{tg}(\lambda_T - \sigma_T)\sin\lambda_D] \end{cases} \tag{11－4.57}$$

当已知 $\dot{\gamma}_D$、$\dot{\gamma}_T$ 时，由(11－4.57)式可求出 $\dot{\theta}_T$ 及 $\dot{\sigma}_T$，再根据(11－4.48)式导出 R_{y_2}、R_{z_2}，即

$$\begin{cases} Y = R_{y_2} = mV\left(\dot{\theta}_T - \dfrac{g_{y_2}}{V}\right) \\ Z = R_{z_2} = mV\cos\theta_T(\dot{\sigma}_T - \dfrac{g_{z_2}}{V} \end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} Y = C_y q S_m \\ Z = C_z q S_m \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} C_y = \dfrac{mV}{qS_m}\left(\dot{\theta}_T - \dfrac{g_{y_2}}{V}\right) \\ C_z = \dfrac{mV\cos\theta_T}{qS_m}\left(\dot{\sigma}_T - \dfrac{g_{z_2}}{V}\right) \end{cases}$$

当 α 及 β 较小时，可利用 $C_y = C_y^\alpha \alpha$ 和 $C_z = C_z^\beta \beta$ 直接求得冲角和侧滑角

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{mV}{C_y^\alpha qS_m}\left(\dot{\theta}_T - \dfrac{g_{y_2}}{V}\right) \\ \beta = \dfrac{mV\cos\theta_T}{C_z^\beta qS_m}\left(\dot{\sigma}_T - \dfrac{g_{z_2}}{V}\right) \end{cases} \tag{11－4.58}$$

当 α 及 β 较大时，由于一般情况下已知 $C_y(M,H,\alpha)$ 及 $C_z(M,H,\beta)$ 值，因此可利用反查数表法求取 α 及 β。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

4. 初始条件确定

将上述各方程联立起来组成可求解的弹头再入机动弹道微分方程组。根据初始条件和终端约束，应用数值积分方法解算上述方程组即可求得满足约束条件的再入机动弹道参数。

一般来说，研究弹道导弹的运动都是相对发射坐标系而言的，那么弹头再入飞行前的弹道参数是相对发射坐标系的运动参数。因此数值积分再入机动质心运动方程时，需要给出相对目标坐标系的积分初始值。

若弹头开始机动飞行时，相对发射坐标系各轴的质心坐标为 x, y, z，速度投影为 V_x，V_y, V_z 则由(11－4.4)式和(11－4.5)式可得相对目标坐标系各轴上的质心坐标和速度投影，即

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_g^T \begin{bmatrix} x + R_{0x} \\ y + R_{0y} \\ z + R_{0z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11－4.59}$$

$$\begin{bmatrix} V_{x_T} \\ V_{y_T} \\ V_{z_T} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_g^T \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{11－4.60}$$

弹道倾角和弹道偏角为

$$\begin{cases} \theta_T = \operatorname{tg}^{-1}\left[\dfrac{-V_{y_T}}{\sqrt{V_{x_T}^2 + V_{z_T}^2}}\right] \\ \sigma_T = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\dfrac{V_{z_T}}{V_{x_T}}\right) \end{cases} \tag{11－4.61}$$

或者

$$\begin{cases} \theta_T = \sin^{-1}\left[\dfrac{V_{y_T}}{\sqrt{V_{x_T}^2 + V_{y_T}^2}}\right] \\ \sigma_T = -\sin^{-1}\left(\dfrac{V_{z_T}}{V}\right) \\ V = (V_{x_T}^2 + V_{y_T}^2 + V_{z_T}^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{11－4.62}$$

如果再入机动弹头质心运动方程组与弹道导弹方程组联立求解，那么可通过(11－4.59)式和(11－4.60)式的逆运算，将相对目标坐标系的运动参数转换为相对发射坐标系的参数，再利用原有的其他方程求得相应的弹道参数。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

第十二章　导弹主要参数的估算

导弹设计通常分为草图设计和校核定型设计两个阶段。根据各阶段所要达到的目的不同，各个不同阶段的工作也有着显著的差别。

草图设计阶段的弹道设计任务一般有两个：其一，根据国家或用户提出的诸如最大瞄准射程、有效载荷以及落点命中精度等战术技术指标，应用近似计算方法，确定出导弹基本设计参数的极限值和在各种实际条件下可供选择的最优值，以使这些参数值作为导弹结构设计和动力装置、制导系统选择的初始值；其二，根据已给出导弹基本设计参数值，估算导弹主动段终点速度，坐标以及对应的最大瞄准射程等飞行特性参数，从而进一步论证导弹是否能够满足使用单位提出的战术技术指标要求。由于该阶段的弹道设计是近似的，所以弹道计算时并不进行复杂的数值积分，而只是根据设计参数或给定飞行特性参数应用近似计算方法，迅速地确定导弹飞行特性参数或结构设计参数。

校核定型阶段的弹道设计是在导弹草图设计基本完成之后进行的。它的任务是根据已确定的设计参数，应用解算精确弹道的方法对导弹进行校核性计算，以便确定导弹的飞行特性是否满足战术技术指标要求。如若不满足，尚需反复调整设计参数使之逐渐趋于合理，直至满足要求为止。这一阶段的弹道计算方法，我们已在第六、七两章中较详细地进行了讨论，这里就不再重复。下面仅就导弹草图设计阶段中的弹道计算问题，做一简要的介绍。

§12.1　主动段终点速度和坐标的估算

由椭圆弹道理论可知，导弹全射程角 β 取决于主动段终点参数和主动段射程角 β_k，即有函数关系式

$$\beta = \beta(V_k、\Theta_k、r_k、\beta_k)$$

由于主动段射程角 β_k 在全射程角中所占比例不大，r_k 对全射程的影响也不大，Θ_k 一般又取为最佳弹道倾角 Θ_{KOPT}，因此，影响全射程角的主要因素是主动段终点速度 V_k。

影响主动段终点速度 V_k 的因素很多，诸如导弹结构、气动外形及发动机和控制系统等等。在精确计算 V_k 时，需要在已知分系统参数的情况下，对导弹主动段运动微分方程组进行数值积分。但在近似计算时，通常将各个影响因素归结为表征某个方面特性的五个基本设计参数。对于给定的导弹，只要知道这些基本设计参数，即可近似地求得其主动段终点速度、坐标和全射程。

12.1.1　导弹基本设计参数

影响主动段终点速度的五个基本设计参数是导弹结构质量比、地面重推比、地面比推

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

力,起飞截面载荷及发动机高空特性系数。现分别介绍如下。

1. 质量比 μ_k

导弹结构质量比 μ_k 的含意是,推进剂烧完时的导弹质量 m_k(或重量 G_k)与起飞质量 m_0(或重量 G_0)之比,即有

$$\mu_k = \frac{m_k}{m_0} = \frac{G_k}{G_0} \tag{12-1.1}$$

由此定义不难看出,μ_k 越小,则在相同的起飞质量 m_0 下,就意味着导弹结构重量小,即导弹可携带更多的燃料,导弹结构就优越。此外,由理想速度的定义可知,μ_k 越小,也就意味着导弹所能达到的理想速度越大。因此,导弹质量比是衡量导弹结构优劣的主要参数之一。μ_k 值的大小取决于导弹所用材料的优劣和技术水平的高低。目前对以单级液体火箭发动机为动力的导弹来说,μ_k 的下限约为 0.08 ~ 0.1,面以固体火箭发动机为动力的导弹,则要稍大一些。

2. 地面重推比 ν_0

地面重推比 ν_0 的含意是,导弹起飞重量 G_0 与地面额定推力 P_0 之比,即

$$\nu_0 = \frac{G_0}{P_0} \tag{12-1.2}$$

显然,ν_0 越小,导弹的加速性能越好,为达到一定速度所用的时间也越短,因而重力造成的速度损失小。从结构强度分析,ν_0 也不宜太小,否则会因加速度太大而使导弹过载过大,从而引起导弹结构重量的增大。

3. 地面比推力 P_{b0}

地面比推力 P_{b0} 的含意是,发动机地面额定推力 P_0 与地面推进剂重量秒消耗量 $\dot{G}_0$ 之比,即

$$P_{b0} = \frac{P_0}{\dot{G}_0} \tag{12-1.3}$$

因该参数已在第三章中作过详细讨论,所以这里就不再叙述了。

4. 发动机高空特性系数 a

该系数的定义是,发动机真空比推力 P_{bz}(或真空额定推力 P_{z0})与地面比推力 P_{b0}(或地面额定推力 P_0)之比,即

$$a = \frac{P_{bz}}{P_{b0}} \tag{12-1.4}$$

5. 起飞截面载荷 P_M

这个设计参数的定义是,导弹起飞重量 G_0 与其最大横截面积 S_m 之比,即

$$P_M = \frac{G_0}{S_m} \tag{12-1.5}$$

当 G_0 一定时,S_m 越小,则 P_M 越大,导弹一般就越细长,这样也就影响到导弹的气动特性,因而,P_M 亦称为气动特性参数。

另外,我们再引入一个被称为理想时间的辅助参数 T,它表示将导弹起飞重量 G_0 作为燃料以地面重量秒流量 $\dot{G}_0$ 之速度燃烧完时所花费的时间,即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$T = \frac{G_0}{\dot{G}_0} = \frac{m_0}{\dot{m}_0}$$

或

$$T = \frac{G_0}{\dot{G}_0} = \frac{G_0}{P_0}\frac{P_0}{\dot{G}_0} = \nu_0 P_{b0} \tag{12-1.6}$$

显然,理想时间 T 不是一个独立参数。

12.1.2 主动段速度的估计

由导弹主动段运动微分方程组可知

$$\dot{V} = \frac{P_e}{m} - g\sin\theta - \frac{X}{m} \tag{12-1.7}$$

当将发动机有效推力 P_e 和有效喷气速度 u_e 表达式

$$\begin{cases} P_e = \dot{m}u_e - S_a p \\ u_e = u + \dfrac{S_a p_a}{\dot{m}} \end{cases} \tag{12-1.8}$$

代入上式时,则得

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{m}u_e - g\sin\theta - \frac{X}{m} - \frac{S_a p}{\dot{m}}$$

对上式进行积分,即可得导弹主动段任一瞬时 t 的速度 V,即

$$V = V_u - \Delta V_1 - \Delta V_2 - \Delta V_3 \tag{12-1.9}$$

其中

$$\begin{cases} V_u = \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{m}}{m}u_e \mathrm{d}t \\ \Delta V_1 = \displaystyle\int_0^t g\sin\theta \mathrm{d}t \\ \Delta V_2 = \displaystyle\int_0^t \frac{X}{m}\mathrm{d}t \\ \Delta V_3 = \displaystyle\int_0^t \frac{S_a p}{m}\mathrm{d}t \end{cases} \tag{12-1.10}$$

显然,V_u 为真空条件下不计重力影响时的导弹主动段速度,即理想速度;ΔV_1 为因重力作用而产生的速度损失,称为重力损失速度;ΔV_2 为气动阻力引起的速度损失,称为阻力损失速度;ΔV_3 为因大气压力产生的速度损失,称为大气压力损失速度。

由上所述,若将式(12-1.10)之积分上限取 $t = t_k$,即可容易地求得主动段终点速度

$$\begin{cases} V_k = V_{uk} - \Delta V_{1k} - \Delta V_{2k} - \Delta V_{3k} \\ V_{uk} = \displaystyle\int_0^{t_k} \frac{\dot{m}}{m}u_e \mathrm{d}t \\ \Delta V_{1k} = \displaystyle\int_0^{t_k} g\sin\theta \mathrm{d}t \\ \Delta V_{2k} = \displaystyle\int_0^{t_k} \frac{X}{m}\mathrm{d}t \\ \Delta V_{3k} = \displaystyle\int_0^{t_k} \frac{S_a p}{m}\mathrm{d}t \end{cases} \tag{12-1.11}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

为具体求主动段终点速度 V_k，由质量方程

$$m = m_0 - \dot{m}t$$

可得

$$t = \frac{m_0 - m}{\dot{m}} = \frac{m_0}{\dot{m}}\left(1 - \frac{m}{m_0}\right)$$

即

$$t = T(1 - \mu)$$

由此得

$$\mathrm{d}t = -T\mathrm{d}\mu = -\nu_0 P_{bo}\mathrm{d}\mu$$

于是

$$\begin{cases} V_{uk} = \int_0^{t_k} \dfrac{\dot{m}}{m} u_e \mathrm{d}t = u_e \int_{\mu_k}^1 \dfrac{1}{\mu}\mathrm{d}\mu = -u_e \ln\mu_k \\ \Delta V_{1k} = \int_0^{t_k} g\sin\theta \mathrm{d}t = \nu_0 P_{bo}\int_{\mu_k}^1 g\sin\theta \mathrm{d}\mu \\ \Delta V_{2k} = \int_0^{t_k} \dfrac{X}{m}\mathrm{d}t = \dfrac{g_0\nu_0 P_{bo}S_m}{G_0}\int_{\mu_k}^1 C_X \dfrac{1}{2}\rho V^2 \dfrac{1}{\mu}\mathrm{d}\mu \\ \Delta V_{3k} = \int_0^{t_k} \dfrac{S_a p}{m}\mathrm{d}t = \dfrac{\nu_0 P_{bo}S_a p_0}{m_0}\int_{\mu_k}^1 \dfrac{p}{p_0}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = g_0 P_{bo}(a-1)\int_{\mu_k}^1 \dfrac{p}{p_0}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \end{cases}$$

考虑到真空条件下的发动机有效喷气速度

$$u_e = \frac{P_{zo}}{\dot{m}} = \frac{g_0 P_{zo}}{\dot{G}} = g_0 P_{bo} a$$

和

$$P_M = \frac{G_0}{S_m}$$

且令

$$\begin{cases} \mathrm{I}_{1k} = \int_{\mu_k}^1 \sin\theta \mathrm{d}\mu \\ \mathrm{I}_{2k} = \int_{\mu_k}^1 \dfrac{1}{2} C_X \rho V^2 \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \\ \mathrm{I}_{3k} = \int_{\mu_k}^1 \dfrac{p}{p_0}\dfrac{1}{\mu}\mathrm{d}\mu \end{cases} \tag{12-1.12}$$

时，则导弹主动段终点速度可表为

$$\begin{cases} V_k = V_{uk} - \Delta V_{1k} - \Delta V_{2k} - \Delta V_{3k} \\ V_{uk} = -g_0 P_{bo} a \ln\mu_k \\ \Delta V_{1k} = \nu_0 P_{bo} g_0 \mathrm{I}_{1k} \\ \Delta V_{2k} = \nu_0 P_{bo} g_0 \dfrac{1}{P_M}\mathrm{I}_{2k} \\ \Delta V_{3k} = P_{bo} g_0 (a-1)\mathrm{I}_{3k} \end{cases} \tag{12-1.13}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

显然，如果能对 I_{1k}、I_{2k}、I_{3k} 之值进行估算，那么主动段终点速度 V_k 便可求得。下面就分别对 I_{1k}、I_{2k}、I_{3k} 进行讨论。

1. I_{1k} 的估算

为估算 I_{1k}，必须知道函数 $\theta(\mu)$。在主动段，受控弹道导弹的飞行程序角偏差 $\Delta\varphi_{cx}$ 和飞行冲角 α 均较小，可近似认为 $\Delta\varphi_{cx} = \alpha = 0$，因而由关系式 $\theta = \varphi - \alpha$ 可取 $\theta(\mu) = \varphi(\mu)$。此外，考虑到导弹的实际飞行程序一般都接近于典型的飞行程序，这样我们即可用典型的 $\theta(\mu)$ 近似估算 I_{1k} 的数值。与 $\varphi_{cx}(\mu)$ 相类似的典型弹道倾角 $\theta(\mu)$ 如图 12－1 所示，其表达式为

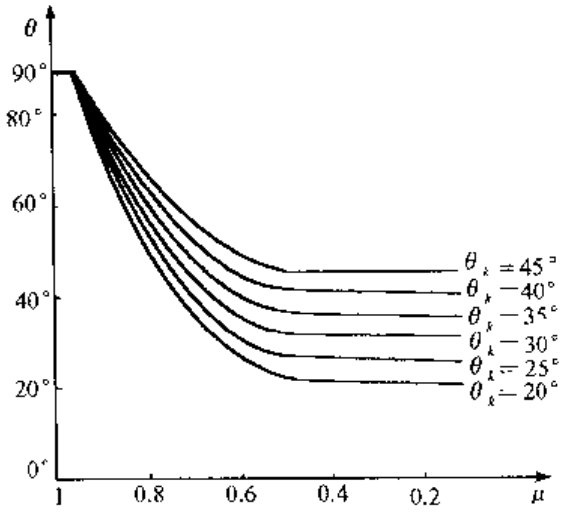


图 12－1

$$\begin{cases} \theta = 90^\circ, & 1 \geqslant \mu \geqslant 0.95 \\ \theta = 4\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_k\right)(\mu - 0.45)^2 + \theta_k, & 0.95 \geqslant \mu \geqslant 0.45 \\ \theta = \theta_k, & 0.45 \geqslant \mu \end{cases} \tag{12－1.14}$$

因此，对不同的 θ_k 就可积分出相应的 $I_1 = I_1(\mu, \theta_k)$ 值（图 12－2）。

2. I_{2k} 的估算

为了求得 I_{2k}，必须知道阻力系数 $C_X = C_X(M)$ 以及飞行中的大气密度 ρ 和速度 V 随 μ 的变化规律。在近似估算时，也可取典型导弹的 $C_X = C_X(M)$ 曲线，而 V 则采用其一阶近似值 V_1，即

$$V_1 = V_{uk} - \Delta V_{1k} \tag{12－1.15}$$

至于计算大气密度 ρ 和音速 a 时所依据的高度 h，则近似为 y，而 y 可由

$$\dot{y} = V_1 \sin\theta$$

积分求出，即

$$h = y = \int_0^{t_k} V_1 \sin\theta \mathrm{d}t = T\int_{\mu_k}^{1} V_1(\mu)\sin\theta \mathrm{d}\mu \tag{12－1.16}$$

在确定 I_{2k} 的大量计算的基础上，可得出如图 12－3 所示的经验曲线 $I_2 = I_2(V_1, \sigma)$，其

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

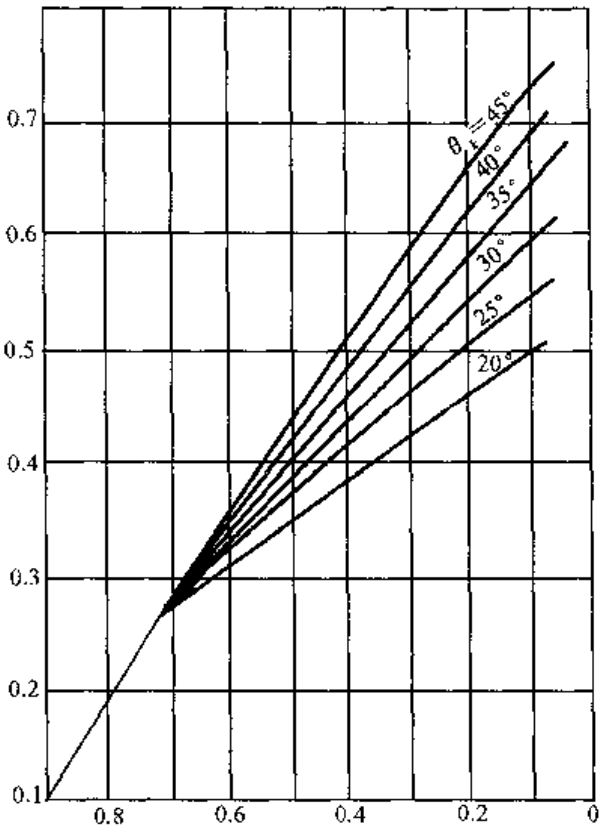


图 12 - 2

中

$$\sigma = \nu_0 P_{b_0} \sqrt{\frac{1}{2} g_0 (a+1) P_{b_0}} \sin\theta_k \cdot 10^{-3} \qquad (12-1.17)$$

根据 μ_k 计算出 V_1 及 σ 后，即可由图 12 - 3 查得其相应的 I_{2k} 值。

3. I_{3k} 的估算

由

$$\mathrm{I}_{3k} = \int_{\mu_k}^{1} \frac{p}{p_0} \frac{1}{\mu} \mathrm{d}\mu$$

可知，I_{3k} 随导弹所处的高度而变化。为了计算 I_{3k}，必须知道 $\frac{p}{P_0}$ 随 μ 的变化规律，而 $\frac{p}{P_0}$ 可根据高度 $h = y(\mu)$ 查找大气表求出。但在计算 $y(\mu)$ 时，我们完全有条件采用速度的二次近似值 V_2，因此 $y(\mu)$ 应取如下近似式

$$h = y(\mu) = \nu_0 P_{b_0} \int_{\mu_k}^{1} V_2(\mu) \sin\theta \mathrm{d}\mu \qquad (12-1.18)$$

其中

$$V_2(\mu) = V_{uk} - \Delta V_{1k} - \Delta V_{2k} \qquad (12-1.19)$$

经大量计算后可有经验关系式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

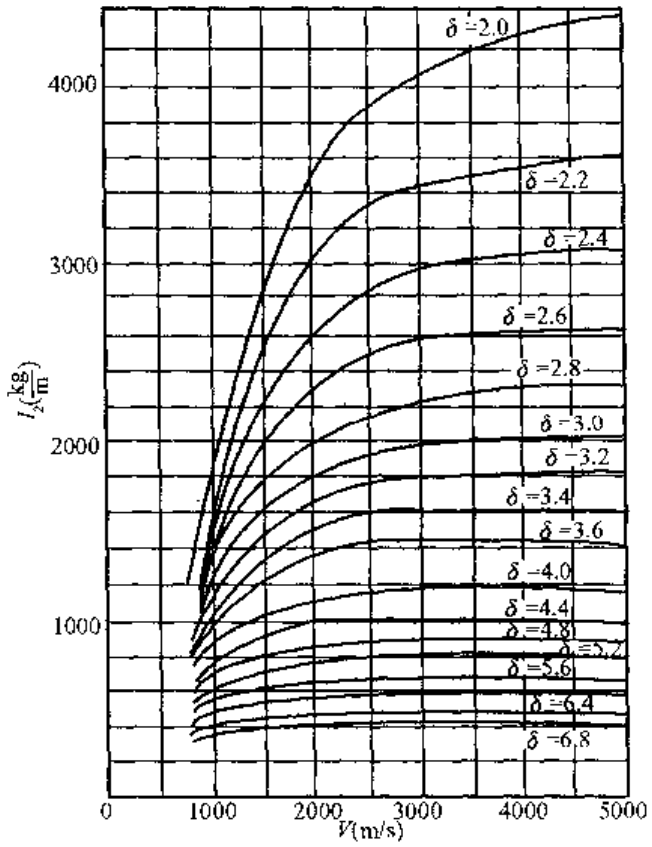


图 12 – 3

$$I_{3k} = \frac{\eta}{\frac{1}{2}g_0(a+1)P_{bo}\sqrt[3]{\frac{1}{2}g_0(a+1)P_{bo}\sin\theta_k \cdot 10^{-3}}} \qquad (12-1.20)$$

其中可查图 12 – 4。

导弹主动段飞行时间为

$$t_k = \nu_0 P_{bo}(1-\mu_k) \qquad (12-1.21)$$

下面几个图形是以某导弹为例的计算结果,此弹的设计参数为

$$P_{bz} = 288\ \frac{\text{kg}}{\text{kg/s}}$$

$$\nu_0 = 0.577$$

$$P_{bo} = 240\ \frac{\text{kg}}{\text{kg/s}}$$

$$P_M = 10000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\theta_k = 38°20'$$

图 12 – 5 画出了 ΔV_1、ΔV_2、ΔV_3 对速度的相对百分比。在飞行过程中,这一百分比是变化的。图 12 – 6 ~ 图 12 – 8 分别画出了 ΔV_1、ΔV_2、ΔV_3 近似结果与精确计算结果的比较图形。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

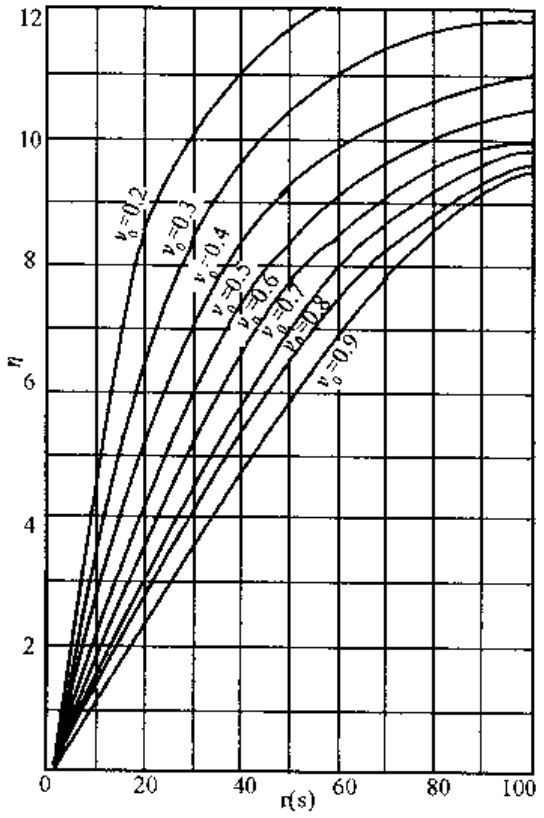


图 12 – 4

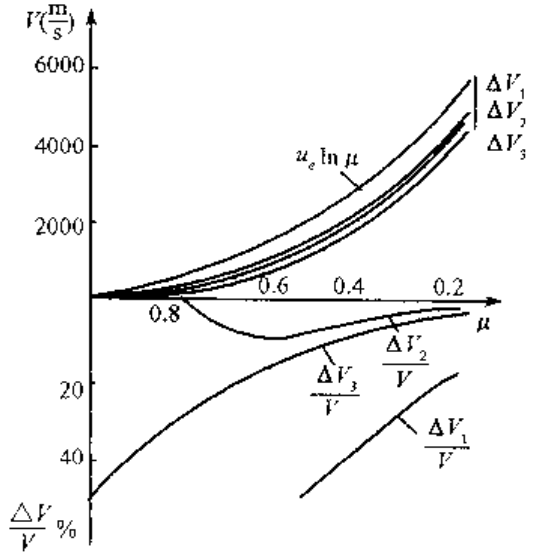


图 12 – 5

12.1.3 主动段终点坐标的估计

由导弹主动段运动微分方程式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

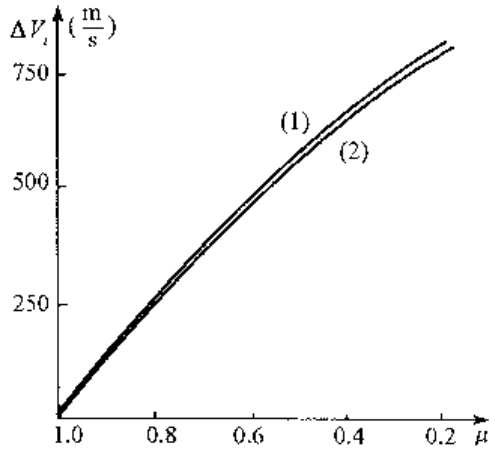


图 12 - 6

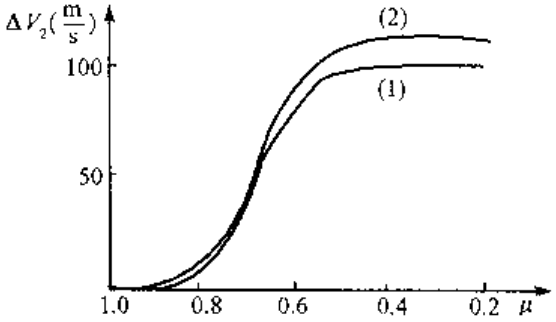


图 12 - 7

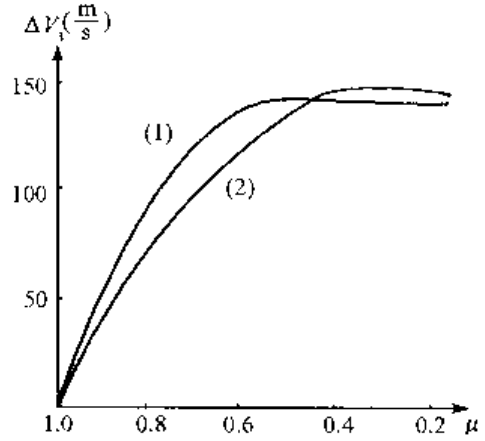


图 12 - 8

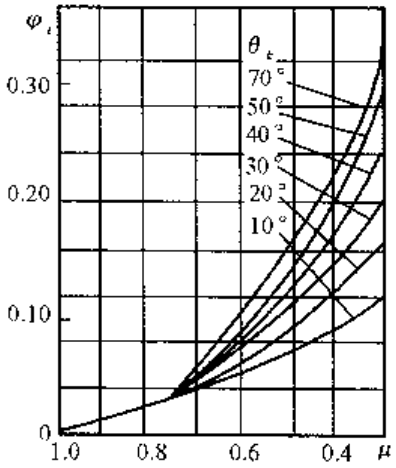


图 12 - 9

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V\cos\theta \\ \dfrac{dy}{dt} = V\sin\theta \end{cases}$$

分析可知,只要对上式进行积分便可求得主动段任一时刻的位置坐标

$$\begin{cases} x = \int_0^t V\cos\theta dt \\ y = \int_0^t V\sin\theta dt \end{cases} \tag{12 - 1.22}$$

当将理想速度 V_u 改写成如下形式

$$V_u = -g_0 P_{bo}\ln\mu + g_0(a-1)P_{bo}\int_\mu^1 \frac{1}{\mu}d\mu$$

后,则主动段速度可表为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$
\begin{aligned}
V &= V_u - \Delta V_1 - \Delta V_2 - \Delta V_3 \\
&= -g_0 P_{bo} \ln\mu - g_0 \nu_0 P_{bo} \int_\mu^1 \sin\theta \, d\mu \\
&\quad - \frac{g_0 \nu_0 P_{bo}}{P_M} \int_\mu^1 C_x \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{1}{\mu} d\mu + g_0 P_{bo} (a-1) \int_\mu^1 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \frac{1}{\mu} d\mu
\end{aligned} \tag{12-1.23}
$$

由于上式等号后第三项和第四项符号相反，它们可彼此抵消一部分，所以在近似计算导弹主动段终点坐标时完全可略去速度公式中的后两项，于是有

$$
V(\mu) = -g_0 P_{bo} \ln\mu - g_0 \nu_0 P_{bo} \mathrm{I}_1 \tag{12-1.24}
$$

将上式与 $dt = -\nu_0 P_{bo} d\mu$ 一并代入(12-1.22)式，则导弹主动段终点坐标为

$$
\begin{cases}
y_k = D_1 \left(\Phi_1 - \dfrac{1}{2} \nu_0 \mathrm{I}_1^2\right) \\
x_k = D_1 (\Phi_2 - \nu_0 \Phi_4)
\end{cases} \tag{12-1.25}
$$

式中

$$
\begin{cases}
D_1 = g_0 \nu_0 P_{bo}^2 \\
\Phi_1 = \displaystyle\int_{\mu_k}^1 \sin\theta(\mu, \theta_k) \ln \frac{1}{\mu} d\mu \\
\Phi_2 = \displaystyle\int_{\mu_k}^1 \cos\theta(\mu, \theta_k) \ln \frac{1}{\mu} d\mu \\
\Phi_4 = \displaystyle\int_{\mu_k}^1 \cos\theta(\mu, \theta_k) \mathrm{I}_1(\mu, \theta_k) d\mu \\
\mathrm{I}_1^2 = \displaystyle\int_{\mu_k}^1 \sin\theta(\mu, \theta_k) \mathrm{I}_1(\mu, \theta_k) d\mu
\end{cases} \tag{12-1.26}
$$

利用(12-1.14)及 $I_1(\mu, \theta_k)$，事先计算出不同 θ_k 时的函数 Φ_1、Φ_2 和 Φ_4，并绘制成曲线(图 12-9 ~ 图 12-11)，以便于计算 x_k 及 y_k 时查用。

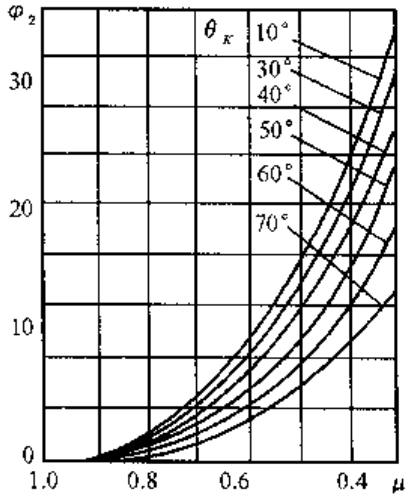


图 12-10

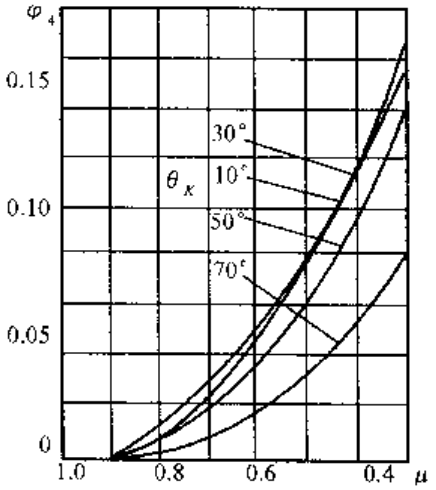


图 12-11

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

§12.2 全射程的估算

若将导弹再入段弹道视为自由段弹道的延续，那么被动段射程角 β_c 可由椭圆弹道理论导出的射程角公式进行计算。因此，在由设计参数估算出主动段终点速度和坐标后，即可按(9－3.8)式计算出被动段射程角

$$\beta_c = 2\mathrm{tg}^{-1}\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{12-2.1}$$

其中

$$\begin{cases} A = 2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_k) - \nu_k(R+r_k) \\ B = 2R\nu_k\mathrm{tg}\Theta_k \\ C = \nu_k(R-r_k) \\ r_k = R+y_k \\ \Theta_k = \beta_k+\theta_k \\ \beta_k = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{x_k}{R+y_k} \end{cases} \tag{12-2.2}$$

于是导弹全射程为

$$L = R(\beta_c+\beta_k)$$

有时，也可直接用由五个基本设计参数计算出的 V_k 来估算最佳速度倾角所对应的被动段射程，然后将这一射程乘一比例系数得出全射程。事实上，由关系式

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_{c\max}}{2} = \frac{\nu_k}{2}\sqrt{\frac{1}{1-\nu_k}}$$

很容易求得被动段射程

$$L_c = R\beta_{c\max} = 2R\mathrm{tg}^{-1}\frac{\nu_k}{2\sqrt{1-\nu_k}} \tag{12-2.3}$$

其中

$$\nu_k = \frac{V_k^2 r_k}{fM}$$

在近似估算中，若取 $r_k = R = 6371\mathrm{km}$，而 V_k 又以“km/s”为单位时，则

$$\nu_k = \frac{V_k^2}{62.57} \tag{12-2.4}$$

因而被动段射程为

$$L_c = 222.4\mathrm{tg}^{-1}\frac{V_k^2}{15.82\sqrt{62.57-V_k^2}} \tag{12-2.5}$$

若令导弹的全射程与被动段射程之比为

$$L/L_c = k_L$$

时，则全射程即可表为(射程角以“度”计)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$L = 222.4k_L \mathrm{tg}^{-1}\frac{V_k^2}{15.82\sqrt{62.57 - V_k^2}} \qquad (12-2.6)$$

其中 k_L 称为射程估算系数，其值由统计方法确定，它是理想时间 T 和速度 V_k 的函数。在精度要求不甚高，按上式计算导弹射程时，经验表明，对于 100 ~ 1700km 的射程可取 k_L = 1.28 ~ 1.115，对于 1000 ~ 10000km 的射程可取 k_L = 1.13 ~ 1.095，均能获得一定的准确度。

顺便指出，也可对上述用主动段终点速度估算射程的公式进行反解，从而获得给定射程下的主动段终点速度值。实际上，由

$$\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2} = \frac{\nu_k}{2\mathrm{tg}\Theta_{KOPT}} = \frac{\nu_k}{2\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_c}{4})}$$

及

$$\nu_k = \frac{V_k^2}{62.57}$$

很容易得出

$$V_k = 11.9\sqrt{\mathrm{tg}(\frac{L}{222.4k_L})^\circ \mathrm{tg}(45^\circ - \frac{L}{2\times 222.4k_L})} \qquad (12-2.7)$$

其中 V_k 仍以“km/s”计算。

在不同理想时间 T 值下的 V_k 和 L 的关系可作成曲线(图 12 - 12)，使用时直接查取。

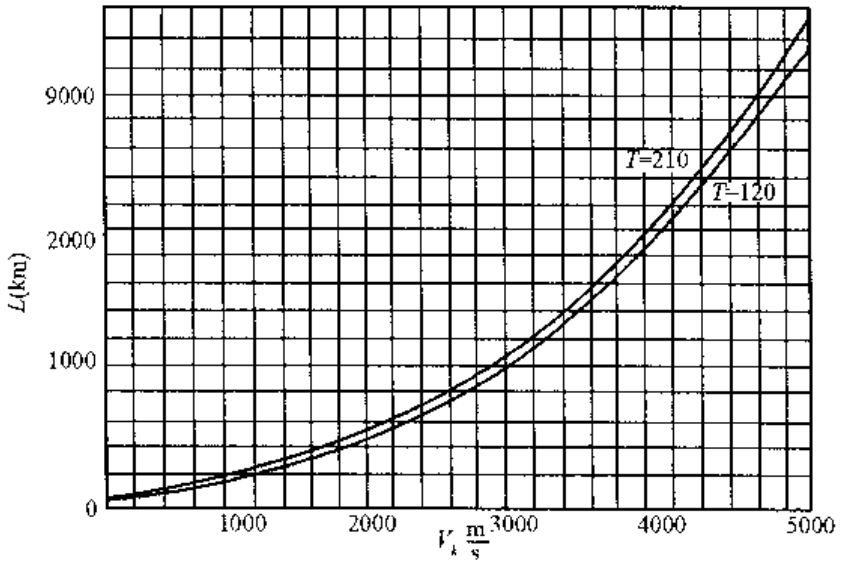


图 12 - 12

§ 12.3 导弹设计参数的选择

这一节里，我们专门讨论导弹初步设计中的另一实际问题，即根据战术技术指标中射程的要求如何选择导弹的基本设计参数。这是上节所讨论问题的反解问题。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

由前面讨论得知，导弹的射程主要取决于主动段终点速度 V_k，而 V_k 又与导弹基本设计参数密切相关。因此，我们可以根据给定的射程来确定导弹的基本设计参数。其基本思路是，首先根据给定的射程粗估理想飞行时间 T 和主动段终点速度 V_k，然后再由 V_k 选择其基本设计参数，如果由所选择的设计参数 ν_0 及 P_{b0} 确定出的 T 值与粗估值差别较大，那么可进行迭代计算，直到两者之差在允许值范围内为止。

由 §12.1 可知，主动段终点速度 V_k 可表为基本设计参数与速度倾角 θ_k 的函数，即

$$V_k = V_k(\mu_k, \nu_0, P_{b0}, a, P_M, \theta_k)$$

其中，θ_k 取最佳速度倾角 $\Theta_{KOPT} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_c}{4}$。被动段射程角 $\beta_c = \frac{L}{Rk_L}$ 中之 k_L 可由 V_k 及 T 来确定。因五个基本设计参数中的比值 a 变化不大，可取为常值。P_M 只对 ΔV_2 有影响，而 ΔV_2 在速度中所占比例也不大，因此初步设计中，P_M 值也可参考给定。P_{b0} 主要取决于燃料种类和发动机工作情况，设计中也可预先给定。这样一来，在五个设计参数中实际上可供选择的仅有质量比 μ_k 和重推比 ν_0。也就是说，V_k 主要取决于 μ_k 及 ν_0 的组合。μ_k 和 ν_0 不能随意取值，它们由导弹的重量(或质量)方程相联系。

事实上，导弹的起飞质量可表示为各部分质量之和

$$m_0 = m_p + m_c + m_u \tag{12-3.1}$$

其中 m_p 为推进剂质量；

m_c 为结构质量；

m_u 为有效载荷质量。

为便于参数的选择，需将各部分质量与设计参数相联系。对于 m_p 和 m_c，显然有

$$\begin{cases} m_p = (1-\mu_k)m_0 \\ m_c = m_{en} + m_b + m_{pt} \end{cases} \tag{12-3.2}$$

式中，m_{en} 为发动机及其附件的质量，它取决于推力、发动机结构形式、材料性能、燃烧室压力和喷管出口压力等，可近似看作只与推力成比例的量，即有

$$m_{en} = \frac{b}{g_0}P_0 = \frac{b}{\nu_0}m_0 \tag{12-3.3}$$

m_b 为包括壳体、仪器舱及控制仪器在内的质量，可近似看作是只与导弹起飞质量成比例的量，即

$$m_b = Bm_0 \tag{12-3.4}$$

m_{pt} 为推进剂箱质量，可认为它是和推进剂质量成比例的量，即有

$$m_{pt} = K(1-\mu_k)m_0 \tag{12-3.5}$$

因此导弹质量方程为

$$\begin{aligned} m_0 &= m_c + m_p + m_u \\ &= \left[B + \frac{b}{\nu_0} + (1+K)(1-\mu_k)\right]m_0 + m_u \end{aligned} \tag{12-3.6}$$

或

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$m_0 = \frac{m_u}{1 - B - \frac{b}{\nu_0} - (1 + K)(1 - \mu_k)} \tag{12-3.7}$$

其中 B,b 和 K 由经验统计关系给出。

质量方程还可写成另一种形式

$$\mu_k = \frac{1}{1 + K}\left(\lambda + K + B - \frac{b}{\nu_0}\right) \tag{12-3.8}$$

或

$$\mu_k = \frac{K + B + \frac{b}{\nu_0}}{1 + K} + \frac{\lambda}{1 + K} = (\mu_k)_{\lim} + \frac{\lambda}{\lambda + K} \tag{12-3.9}$$

其中

$$\lambda = \frac{m_u}{m_0} \tag{12-3.10}$$

为导弹有效载荷比。$(\mu_k)_{\lim}$ 为极限质量比，即为导弹无载荷时的质量比，目前条件下 $(\mu_k)_{\lim}$ 约为 0.08。

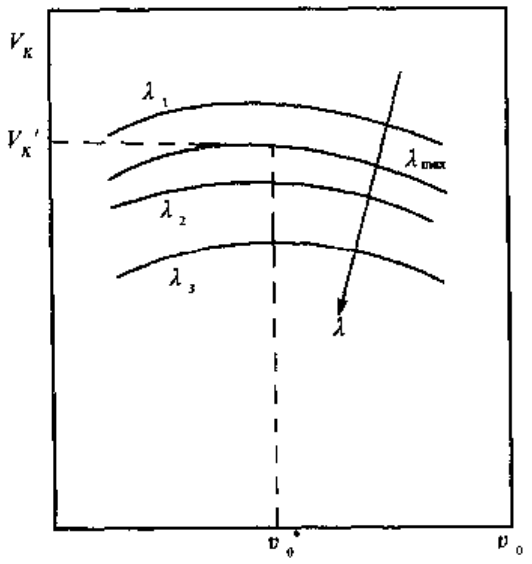


图 12 - 13

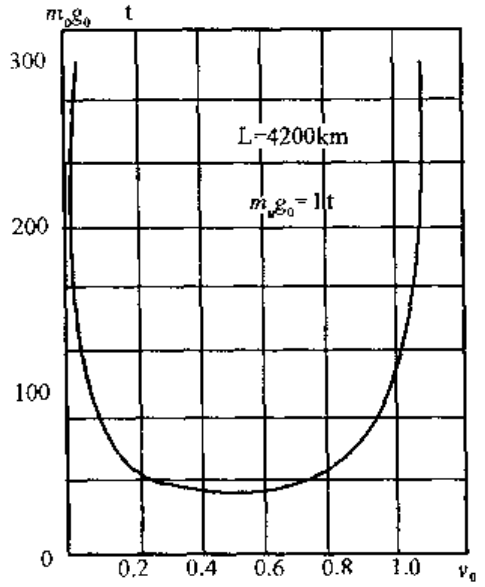


图 12 - 14

由(12 - 3.8)或(12 - 3.9)式看出，在 λ 一定时，μ_k 与 ν_0 有一定的对应关系。如果重推比 ν_0 取小值，则因加速性能好，将使导弹达到给定速度所需要的时间短，因而重力造成的速度损失就小。从这一观点出发，ν_0 取小值是有益的；但由于 ν_0 小也会使导弹质量比增大而增加导弹结构重量。因此，在给定载荷比下，为获得最大速度，或者在给定速度下，为获得最大载荷比，ν_0 和 μ_k 之间必然有一个最好的组合，而这种最有利组合可应用工程方法很方便地找出。其方法是，先在一定的载荷比下给出一组 ν_0 值，由重量方程(12 - 3.9)计

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

算出对应的一组 μ_k 值，这样就可在五个基本设计参数均已知的情况下，用 § 12.1 中给出的方法求出对应的一组 V_k，并绘制成 V_k 与 ν_0 的关系曲线(图 12 - 13)。用同样的方法求出不同 λ 值时的 V_k 与 ν_0 的曲线族。再在这族曲线中依据给定的射程所对应的 V_k^* 值，确定出最大有效载荷比 λ_{max} 及其与 λ_{max} 相对应的 ν_k^* 值。最后再将所求重推比 ν_k^* 代入质量方程，即可求得所需的质量 μ_k^* 比值。

图 12 - 14 画出了射程与有效载荷比一定时某导弹的起飞重量 G_0 与重推比 ν_0 的关系曲线。曲线的最低点即对应于重推比的最佳值 ν_0^*。当 $\nu_0 < \nu_0^*$ 时，则 m_0 因结构质量增加而增加；而当 $\nu_0 > \nu_0^*$ 时，m_0 又因重力造成的速度损失的增大而增大。

单级液体推进剂导弹的最佳重推比 $\nu_0^* \approx 0.55 \sim 0.60$。函数 $m_0(\nu_0)$ 在最佳点附近变化较平滑，故 ν_0 偏离最佳点较小时 m_0 增加很少，这一点对设计导弹是很有用的。因此，为减少导弹的研制时间和成本，完全可利用现有的(或标准化了的)发动机，而不必为追求 ν_0 的最佳值另行设计。

§ 12.4 多级火箭主要参数的估算

由 § 12.1 可知，主动段终点速度 V_k 取决于理想速度 V_{uk} 和各速度损失 ΔV_{1k}、ΔV_{2k}、ΔV_{3k}。为增大 V_k 就必须增大 V_{uk} 或减小各速度损失 ΔV_{1k}、ΔV_{2k} 及 ΔV_{3k}。但由于速度损失是不可避免的，且因它们在 V_k 中所占的比例也不大，因此，增大主动段终点速度 V_k 的主要途经应是增大理想速度 V_{uk}。

由关系式

$$V_{uk} = -u_e \ln \mu_k$$

可知，欲增大理想速度 V_u 就必须增大发动机的有效排气速度 u_e 或减小火箭质量比 μ_k，但这两种办法目前都受到一定的限制。这是因为排气速度受到推进剂性能和发动机结构及工作情况的限制，不能无限提高。如目前使用的化学推进剂所能获得的有效排气速度 u_e 仅为 2.5 ~ 3.6km/s 左右；而质量比 μ_k 又受到材料等方面的限制，也不能无限降低，如目前 μ_k 可能达到的最小值也仅约 0.1，且因 μ_k 是以对数的形式出现在 V_{uk} 式中，故当 μ_k 减小到一定程度后，再用继续减小 μ_k 的办法来提高 V_{uk}，其效果已并不显著了(图 12 - 15)。

在目前的技术条件下，单级火箭可能达到的理想速度一般不超过 9km/s，而当考虑到各项速度损失后，其所能获得的最终速度也不过只有 7km/s 左右，还不及人造地球卫星所需的第一宇宙速度(7.9km/s)。为使导弹在耗能最小的情况下获得所希望的射程，以及为宇宙飞行提供合理的运载工具，就必须采用多级火箭。

采用多级火箭就可以很容易地提高速度或增大射程。它与单级火箭相比，具有一系列的优点。首先，由于多级火箭逐次抛掉每一级工作结束后已成为“死重”的空壳，这就大大节省了加速这部分壳体所需的能量，从而减少了燃料的消耗量。其次，由于多级火箭各级在不同高度上工作，因而可采用适应不同高度工作的发动机，这样可使各级发动机的燃气更加理想的膨胀，以减小推力损失。最后，多级火箭在设计上比单级灵活，每级推力大小、

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

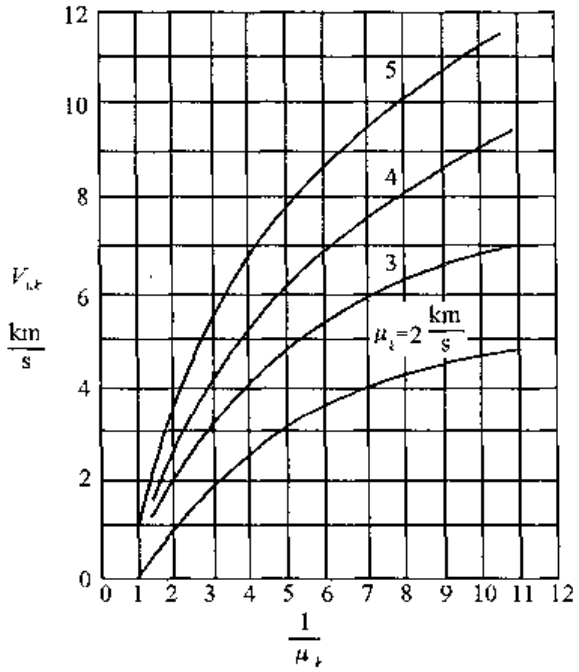


图 12 - 15

火箭重量、工作时间的长短等均可合理地加以选择。当然，采用多级火箭也将会带来结构复杂、控制系统可靠性降低等缺点。因此，多级火箭的级数也并不是越多越好，相反，总是希望选择尽可能少的级数。

12.4.1 多级火箭的参数

多级火箭除沿用单级火箭的一些设计参数外，还有与其特点相适应的另一些参数。

多级火箭的级是指一个完整的“推进单位”。它由发动机、推进剂，推进剂储箱和输送系统以及控制设备等组成，并在该级推进剂烧完时丢弃。

多级火箭的子火箭则是指一个相对完整的飞行器概念，它由一级至数级火箭、有效载荷和控制系统所组成(图 12 - 16)。

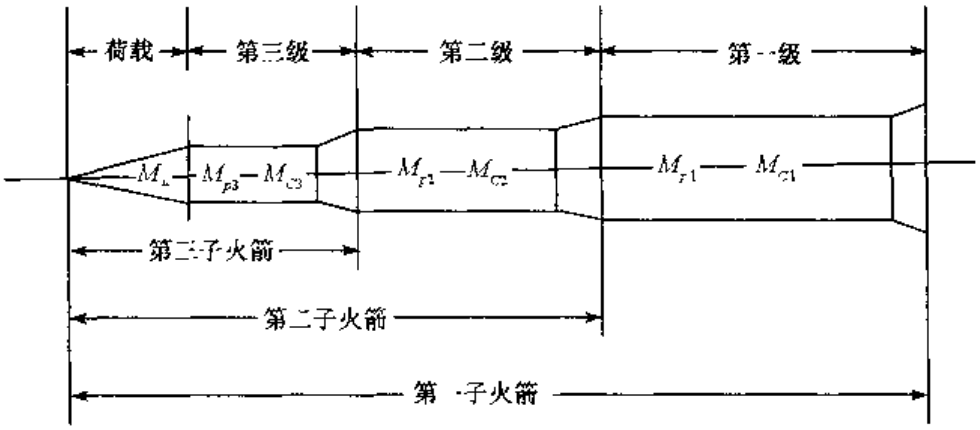


图 12 - 16

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

上图为一枚三级火箭，图上示出了第1、2、3级以及第1、2、3子火箭，同时也标出了弹头载荷质量 M_u 及各级推进剂质量 M_{pi} 和结构质量 M_{Ci}。

根据上述含义，对于一枚 N 级火箭，它的第 i 子火箭的初始质量可表为

$$M_{oi} = M_{ci} + M_{pi} + M_{ui} \tag{12-4.1}$$

其中 M_{ui} 为第 i 子火箭有效载荷质量，或为第 $i+1$ 子火箭的初始质量，即

$$M_{ui} = M_{oi+1}, \quad i = 1, \cdots, N-1$$

$$M_{uN} = M_u, \quad i = N$$

在研究多级火箭时，常用到的第 i 子火箭参数有：

(1) 有效载荷比 λ_i

$$\lambda_i = \frac{M_{ui}}{M_{oi}} = \frac{M_{oi+1}}{M_{oi}} \tag{12-4.2}$$

其含义是，第 i 子火箭的有效载荷质量 M_{ui} 与其初始质量 M_{oi} 之比，或第 $i+1$ 子火箭的初始质量 M_{oi+1} 与第 i 子火箭的初始质量之比。

(2) 结构比 E_i

$$E_i = \frac{M_{ci}}{M_{oi}} \tag{12-4.3}$$

即第 i 级结构质量 M_{ci} 与第 i 子火箭初始质量之比。

(3) 结构系数 ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{M_{ci}}{M_{ci} + M_{pi}} = \frac{M_{ci}}{M_{oi} - M_{oi+1}} = \frac{M_{ci}}{M_{oi} - M_{ui}} \tag{12-4.4}$$

即第 i 级结构质量 M_{ci} 与第 i 级初始质量之比，或者说第 i 级推进剂耗尽后的质量与第 i 级初始质量之比，还可以说是第 i 级结构质量比上第 i 子火箭初始质量与第 i 子火箭有效载荷质量之差。

根据上述各参数定义，不难得到结构系数 ε_i 与结构比 E_i 和有效载荷比 λ_i 间的关系式

$$\varepsilon_i = \frac{M_{ci}}{M_{ci} + M_{pi}} = \frac{M_{ci}}{M_{oi} - M_{ui}} = \frac{E_i}{1 - \lambda_i} \tag{12-4.5}$$

或者

$$\begin{cases} E_i = \varepsilon_i (1 - \lambda_i) \\ \lambda_i = 1 - \dfrac{E_i}{\varepsilon_i} \end{cases} \tag{12-4.6}$$

(4) 质量比 μ_i

$$\mu_i = \frac{M_{ci} + M_{ui}}{M_{oi}} = \frac{M_{oi} - M_{pi}}{M_{oi}} \tag{12-4.7}$$

即第 i 子火箭的有效载荷质量与第 i 级的结构质量之和比上第 i 子火箭的初始质量，或者说第 i 级推进剂耗尽时第 i 子火箭的质量与第 i 子火箭的初始质量之比。

第 i 子火箭各参数之间的关系为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\mu_i = \frac{M_{ui} + M_{ci}}{M_{oi}} = \lambda_i + E_i = \lambda_i + \varepsilon_i(1 - \lambda_i) = \varepsilon_i + \lambda_i(1 - \varepsilon_i) \tag{12-4.8}$$

整个火箭也可类似于子火箭定义各参数，作为衡量多级火箭结构和载荷性能的指标。这些参数是：

(1) 总有效载荷比 λ_{tot}

λ_{tot} 为导弹弹头有效载荷质量与整个火箭初始质量之比，即

$$\lambda_{tot} = \frac{M_u}{M_o} = \frac{M_u}{M_{o1}} = \frac{M_{u1}}{M_{o1}}\frac{M_{u2}}{M_{o2}}\cdots\frac{M_{uN}}{M_{oN}} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_N = \prod_{i=1}^{N}\lambda_i \qquad (i = 1,\cdots,N) \tag{12-4.9}$$

(2) 总结构比 E_{tot}

它为各级结构总质量与整个火箭初始质量之比，即

$$E_{tot} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_{ci}}{M_o} = \sum_{i=1}^{N}\frac{M_{ci}}{M_o} \tag{12-4.10}$$

根据(12-4.4)式，有

$$\frac{M_{ci}}{M_o} = \frac{M_{ci}}{M_{pi}}\frac{M_{pi}}{M_o} = \frac{M_{ci}}{M_{ci} + M_{pi} - M_{ci}}\frac{M_{pi}}{M_o} = \frac{\dfrac{M_{ci}}{M_{ci} + M_{pi}}}{1 - \dfrac{M_{ci}}{M_{ci} + M_{pi}}}\frac{M_{pi}}{M_o} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i}\frac{M_{pi}}{M_o}$$

而由(12-4.2)和(12-4.3)式，又有

$$\frac{M_{pi}}{M_o} = \frac{M_{pi}}{M_{oi}}\frac{M_{oi}}{M_{oi-1}}\cdots\frac{M_{o2}}{M_{o1}} = \frac{M_{pi}}{M_{oi}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1} \tag{12-4.11}$$

$$\frac{M_{pi}}{M_{oi}} = \frac{M_{oi} - M_{ci} - M_{ui}}{M_{oi}} = 1 - E_i - \lambda_i = (1 - \varepsilon_i)(1 - \lambda_i) \tag{12-4.12}$$

所以

$$E_{tot} = \sum_{i=1}^{N}\frac{M_{ci}}{M_o} = \sum_{i=1}^{N}[\varepsilon_i(1 - \lambda_i)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1}] \tag{12-4.13}$$

(3) 总结构系数 ε_{tot}

它为各级结构质量之和与各级初始质量之和的比，即

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\sum M_{ci}}{\sum M_{ci} + \sum M_{pi}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_{ci}}{(1 - \dfrac{M_u}{M_o})M_o} = \frac{1}{1 - \lambda_{tot}}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_{ci}}{M_0} \tag{12-4.14}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

将(10 - 4.13)式代入上式,则有

$$\varepsilon_{tot} = \frac{E_{tot}}{1-\lambda_{tot}} = \frac{1}{1-\lambda_{tot}} \sum_{i=1}^{N} [\varepsilon_i (1-\lambda_i)\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_{i-1}] \qquad (12-4.15)$$

(4) 总质量比 μ_{tot}

μ_{tot} 为弹头载荷质量及各级结构质量之和与整个导弹初始质量之比,即

$$\mu_{tot} = \frac{M_u + \sum M_{ci}}{M_o} = 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{M_{pi}}{M_o}$$

将(12 - 4.11)代入上式,有

$$\begin{aligned} \mu_{tot} &= 1 - \sum_{i=1}^{N} (1-\varepsilon_i)(1-\lambda_i)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{N} (1-\mu_i)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1} \end{aligned} \qquad (12-4.16)$$

同样,总有效载荷比、总结构系数和总质量比之间也存在着相依关系

$$\mu_{tot} = \lambda_{tot} + \varepsilon_{tot}(1-\lambda_{tot}) \qquad (12-4.17)$$

12.4.2 多级火箭的理想速度

对 N 级火箭而言,若第 i 级发动机的有效排气速度及质量比分别为 u_{ei} 和 μ_i 时,那么该火箭在主动段终点的理想速度即可表为

$$V_{ui} = -\sum_{i=1}^{N} u_{ei} \ln \mu_i$$

将(12 - 4.8)式代入上式则有

$$\begin{aligned} V_{ui} &= -\sum_{i=1}^{N} u_{ei} \ln(E_i + \lambda_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} u_{ei} \ln[\lambda_i + \varepsilon_i(1-\lambda_i)] \end{aligned} \qquad (12-4.18)$$

与单级火箭一样,理想速度仍是多级火箭的一个重要特性,它不仅取决于各级有效载荷比 λ_i、结构比 E_i 和发动机的有效排气速度 u_{ei},而且还取决于其级数 N。因此,提高多级火箭理想速度的途经,除与单级火箭一样的寻求高能燃料、高性能材料和新工艺外,还可适当增加其级数。

12.4.3 多级火箭各级有效载荷比的分配

在给定理想速度下如何确定多级火箭各级的有效载荷比为最大,或者在总载荷比给定下如何确定各级的有效载荷比,以使火箭的理想速度为最大,均是典型的条件极值问题,可用拉格朗日乘子法化成无条件极值问题加以解决。

事实上,由(12 - 4.9)式

$$\lambda_{tot} = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i$$

可知,要使 λ_{tot} 取极值也等价于

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\ln\lambda_{tot} = \ln\prod_{i=1}^{N}\lambda_i = \sum_{i=1}^{N}\ln\lambda_i \tag{12-4.19}$$

取极值。为此在理想速度

$$V_u = \sum_{i=1}^{N} u_{ei}\ln(E_i + \lambda_i) \tag{12-4.20}$$

为给定值的约束条件下，可按极值条件理论定义一增广函数

$$F(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{N}\ln\lambda_i + \eta\left[-\sum_{i=1}^{N} u_{ei}\ln(E_i + \lambda_i) - V_u\right] \tag{12-4.21}$$

式中 η 为待定的拉格朗日乘子。这样，满足(12-4.20)并使 $\ln\lambda_{tot}$ 取极值的必要条件成为

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda_i} = 0 \qquad (i = 1,\cdots,N) \tag{12-4.22}$$

即

$$\frac{1}{\lambda_i} - \frac{\eta u_{ei}}{E_i + \lambda_i} = 0$$

由此得

$$\lambda_i = \frac{-E_i}{1-\eta u_{ei}} = \frac{E_i}{\eta u_{ei} - 1} \tag{12-4.23}$$

将(12-4.23)代入(12-4.20)式即可得确定 η 的约束式

$$V_u + \sum_{i=1}^{N} u_{ei}\ln\frac{E_i\eta u_{ei}}{\eta u_{ei} - 1} = 0$$

这是一个超越代数方程，一般求不出解析解，而必须借助于迭代法或图解法求解。

将上式两边同除 $\bar{u}_e$，得

$$\frac{V_u}{\bar{u}_e} + \sum_{i=1}^{N}\frac{u_{ei}}{\bar{u}_e}\ln\left(\frac{E_i\eta u_{ei}}{\eta u_{ei} - 1}\right) = 0 \tag{12-4.24}$$

其中

$$\bar{u}_e = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_{ei} \tag{12-4.25}$$

称为发动机平均有效排气速度。u_{ei} 即为第 i 级发动机有效排气速度，在真空和重力加速度为常值 g_0 时，则可表为

$$u_{ei} = P_{boi}g_0 \tag{12-4.26}$$

其中 P_{boi} 为第 i 级发动机真空比推力。

若令

$$\bar{R} = \exp(Vu/\bar{u}_e) \tag{12-4.27}$$

则

$$\frac{V_u}{\bar{u}_e} = \ln\bar{R}$$

将此式代入(12-4.24)，有

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\bar{R} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\eta u_{ei}-1}{\eta u_{ei}}\right)^{u_{ei}/\bar{u}_e}}{\prod_{i=1}^{N}(E_i)^{u_{ei}/\bar{u}_e}} \tag{12-4.28}$$

求解上式,将所得 η 再代入(12-4.24)式,经整理得

$$\lambda_i = -\frac{E_i}{1-\frac{u_{eN}}{u_{ei}}\left(\frac{\lambda_N}{E_N+\lambda_N}\right)} - E_i \tag{12-4.29}$$

式中 u_{eN}、λ_N、E_N 分别为第 N 级发动机有效排气速度、有效载荷比和结构比。

再将(12-4.29)代入(12-4.20)式,即可导得

$$\bar{R} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{u_{eN}}{u_{ei}}\frac{\lambda_N}{\lambda_N+E_N}\right)^{u_{ei}/\bar{u}_e}}{\prod_{i=1}^{N}(E_i)^{u_{ei}/\bar{u}_e}} \tag{12-4.30}$$

上式中只有 λ_N 为未知数,其值必须用迭代法求解。一旦求出 λ_N 后,便可应用(12-4.29)式求出多级火箭各级有效载荷比 $\lambda_i(i=1,\cdots,N-1)$。

12.4.4 多级火箭参数的确定

应用(12-4.29)式求出各级有效载荷比 λ_i 后,在各级发动机比推力 P_{b0i} 和重推比 λ_{0i} 给定的情况下,按下述公式确定多级火箭的各参数。

总质量及各子级质量:

$$\begin{cases} M_{o1} = \dfrac{1}{\lambda_{\omega 1}}M_u = GM_u \\ M_{oi} = \dfrac{1}{\lambda_i}M_{ui} \end{cases} \tag{12-4.31}$$

式中 $G = \dfrac{1}{\lambda_{\omega 1}} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{N}\lambda_i}$ 称为增长系数。

各级推进剂质量:

$$\begin{aligned} M_{pi} &= M_{oi} - M_{ei} - M_{ui} \\ &= M_{oi}(1-E_i-\lambda_i) \\ &= M_{oi}(1-\mu_i) \end{aligned} \tag{12-4.32}$$

各级结构质量:

$$M_{ei} = M_{oi}E_i \tag{12-4.33}$$

有效载荷质量:

$$M_{ui} = M_{0i} - M_{pi} - M_{oi} \tag{12-4.34}$$

有效排气速度:

$$u_{ei} = P_{bi}g_0 \tag{12-4.35}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

发动机推力：

$$P_i = \nu_{oi} M_{oi} \tag{12-4.36}$$

推进剂燃烧时间：

$$T_{bi} = \frac{M_{pi}}{P_i} P_{boi} \tag{12-4.37}$$

如有一枚将有效载荷送入185km高空的圆轨道上的两级运载火箭，假设各级发动机推力均为常值和在真空中作垂直飞行，其他初始条件如表12.1所示。

表12.1 初始条件

轨道	185km圆轨道	
级数	2	
有效载荷重量(M_u)	36889(kg)	
理想速度(V_x)	9.885(km/s)	
	一级	二级
重推比(ν_{oi})	1.3	1.0
结构比(E_i)	0.0665	0.0965
比推力(P_{boi})	395(s)	419(s)

预估该火箭有效载荷重量与发射重量之比为最大值情况下的各主要参数。其方法和步骤如下：

1、计算有效排气速度 u_{ei}，平均有效排气速度 $\bar{u}_e$ 及 $\bar{R}$ 值

根据初始条件，由式(12-4.26)、(12-4.25)及(12-4.27)分别计算出有效排气速度、平均有效排气速度及参数 $\bar{R}$(计算时，地面重力加速度 g_0 取为 9.8m/s^2)。

2. 计算有效载荷比 λ_i

为求得 λ_i，必须首先知道 λ_N，而 λ_N 则应由(12-4.30)式求出。但因该式为一超越方程，不能求得解析解，因而在各级结构比已知条件下只能用迭代方法求其第 N 级火箭的有效载荷比λ_N。计算时，预先给出$(\frac{\lambda_N}{\lambda_N + E_N})_j$值，将其代入(12-4.30)式求得相应的$\bar{R}_j$，并在给定计算精度 δ 下比较$\bar{R}_j$与$\bar{R}$值，重复计算直至 $|\bar{R}_j - \bar{R}| \leqslant \delta$ 成立为止。然后依据 $\bar{R}_j$ 所对应的$\frac{\lambda_N}{\lambda_N + E_N}$ 值确定出λ_N。应当指出，应用(12-4.30)式进行迭代计算，其收敛的快慢程度与初始给定的$(\frac{\lambda_N}{\lambda_N + E_N})$值很有关系。若所选初始值与其真实值很接近，迭代收敛快，否则收敛慢。

求出 λ_N 后，即可应用(12-4.29)式计算出各级有效载荷比 λ_i(表12.2)和各级质量比 μ_i 以及总有效载荷比λ_{ui}。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

3. 火箭参数的估计

根据初始条件和 λ_1，便可应用(12－4.31) ~ (12－4.37)式计算出两级火箭的参数，其计算结果如表 12.2 所示。

为便于比较，把两级运载火箭的主要参数的实际值和计算值列入表 12.3，其中 A 栏表示实际值，B 栏表示计算值。由表 12.3 不难看出，运载火箭主要参数的计算值与其实际值是比较吻合的。因此在火箭初步设计阶段，应用上述方法预估某些参数是可行的。

表 12.2 计算结果

参数	第一级	第二级
级重(kg)	850547	163502
结构比	0.0665	0.0965
有效载荷比	0.1922	0.2256
有效排气速度(km/s)	3.8710	4.1062
结构重量(kg)	56561	15778
推进剂重量(kg)	630483	110835
有效载荷重量(kg)	163502	36889
发动机推力(kg)	1105711	163502
燃烧时间(s)	225.23	384.03
级的速度增量(km/s)	5.233	4.652

表 12.3 主要参数结果比较

参数	A		B	
	第一级	第二级	第一级	第二级
级重(kg)	840969	175088	850547	163502
结构系数	0.084	0.0965	0.0823	0.0965
推进剂重量(kg)	607820	124739	630483	110835
重推比	1.3	1.0	1.3	1.0
推力(kg)	1093169	175088	1105711	163502
级的速度增量(km/s)	4.892	4.998	5.233	4.652
增长系数	22.798		23.057	

§ 12.5 飞行程序选择

飞行程序是指导弹主动段俯仰角随时间变化的规律，常用 $\varphi_{cx}(t)$ 表示。它是预先给定的已知时间的函数，导弹在主动段就是按这一飞行程序角规律飞行的。选择飞行程序是导

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

弹总体设计工作的重要组成部分，它关系到能否正确使用和充分发挥导弹战术技术性能的大问题，一些重要战术技术性能诸如最大射程、落点散布以及飞行中受热等问题均与飞行程序的选择有关。因此，选择的飞行程序既要尽力满足战术技术要求，也要照顾到国家现有科学技术水平。选择飞行程序通常是在导弹基本结构参数、气动外形以及弹道特性参数确定后进行的，它贯穿于设计工作的全过程。

导弹飞行中的实际俯仰角 $\varphi(t)$ 与飞行程序角 $\varphi_{\alpha}(t)$ 一般是不相等的，但因两者相差甚微，因此弹道计算中可近似认为导弹是按飞行程序角规律飞行的，即 $\varphi(t) \approx \varphi_{\alpha}(t)$。

导弹俯仰角 φ、弹道倾仰 θ 以及冲角间 α 存在如下关系式

$$\varphi = \theta + \alpha \tag{12-5.1}$$

在主动段，由于冲角 α 很小(一般不大于 3°)，一般可略去不计，即有

$$\theta = \varphi_{\alpha}(t) \tag{12-5.2}$$

因此，导弹按 $\varphi_{\alpha}(t)$ 规律飞行实可认为是按 $\theta(t)$ 规律飞行的。

飞行程序角 $\varphi_{\alpha}(t)$ 与导弹设计参数、控制系统性能和发射前对弹道的要求密切相关。对于控制系统相同而其它方面不同的导弹，要使得它们的射程相等，就必须采用不同的飞行程序；同样，对于控制系统不同、而其它方面相同的导弹，为获得最小散布，它们也必须采用不同的飞行程序；即使是对于同一导弹，为获得最大射程、最小散布、最大飞行高度和其它弹道性能，同样也应采用不同的飞行程序。因此，最佳飞行程序是对某种特殊要求而选定的。

12.5.1 飞行程序的任务和要求

1. 飞行程序的任务

飞行程序选择是指拟定导弹主动段飞行程序角 $\varphi_{\alpha}(t)$ 随时间 t 的变化规律，即建立函数 $\varphi_{\alpha}(t)$。其主要任务在于使导弹具有最大射程、最小散布和满足导弹结构等方面提出的技术性能要求。满足最大射程的飞行程序称为最大射程飞行程序，而满足最小散布的飞行程序则称为最小散布飞行程序。对于同一飞行程序说来，最大射程和最小散布的目的并不能同时得到满足，这是因为最小散布一般并不对应于最大射程，恰恰相反，有时减小射程并且适当地选择飞行程序角倒可使散布减小。因此，飞行程序选择时，必须统筹考虑最大射程和最小散布以及与飞行程序有关的导弹其他参数性能。

对于一个设计参数和总体布置已经确定的导弹，为在主动段终点达到最佳弹道倾角 Θ_{KOPT} 就有下面三种不同的飞行程序得以实现(图 12-17)：

(1) 导弹垂直上升，直到接近主动段终点时突然使导弹倾角转到 Θ_{KOPT}。显然，这种方案尽管可使导弹穿越稠密大气层的时间短，空气阻力所造成的速度损失较小，但长时间的垂直上升，使重力造成

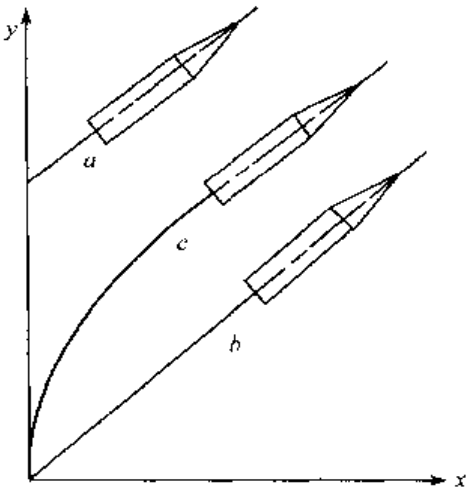


图 12-17

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的速度损失最大，因此不能获得大的主动段终点速度，自然也不会达到最大射程。况且，在短时间内速度倾角突然由$\frac{\pi}{2}$改变到Θ_{KOPT}，其角速度$\dot{\Theta}$和角加速度$\ddot{\Theta}$的值必然很大，从而造成较大的法向力。这不仅会使导弹结构和其他元件受力过大，而且也要求控制系统的执行元件提供较大的控制力和控制力矩，这对改善导弹性能是不利的。

(2) 导弹从起飞开始就按主动段终点速度倾角Θ_{KOPT}飞行，直到主动段终点。这种方案仍然会因导弹在稠密大气层中的飞行时间较长而引起阻力损失速度的加大，因而也不会获得大的主动段终点速度和大的射程。同时，还由于最初发射阶段的操纵效率不高，有可能产生较大的横向偏差，而要克服过大的横向偏差，又须增加操纵机构的控制能力，从而导致导弹重量增加，引起有效载荷或射程减小。此外，倾斜发射还会带来发射装置复杂和发射方向不易改变等缺点。因此，实际上这种发射方式也不能采用。

(3) 垂直起飞，然后逐渐转弯至主动段终点所要求的速度倾角。这种发射方案具有上述两种方案的优点，因此是一种经常使用的飞行程序方案。

2. 对飞行程序的要求

飞行程序的选择不仅应从弹道观点出发，而且还应考虑弹体结构、控制系统和发射装置等方面的实际约束条件。因此，我们对飞行程序的选择提出下列基本要求。

(1) 应有一垂直起飞段

垂直起飞具有发射装置和控制系统简单、便于在360°范围内发射瞄准以及阻力所造成的速度损失小的优点。但其飞行时间不宜过长，亦不宜过短，应合理选择。飞行时间过长，不仅会使重力损失速度增大，而且因转弯时速度过大需要较大的控制力，同时还会产生较大的法向力和法向过载；垂直飞行时间过短，又可能因发动机未达到额定工作状态而使控制系统的执行机构无能力提供足够的控制力，从而影响弹道特性。导弹垂直飞行时间一般至少应延续到发动机进入额定工作状态的时刻，这样才能确保控制系统正常地控制导弹转弯。

(2) 转弯时的法向过载要有限制

前已述及，法向过载可简化为

$$n_y = \frac{V}{g}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \cos\theta = \frac{1}{mg}(P_e + C_y^{\alpha}qS_m)\alpha \qquad (12-5.3)$$

由此可知，法向过载n_y与飞行冲角α及冲角与动压的乘积αq有很大关系，而飞行时作用于弹体上的气动力矩以及由此造成的弯曲载荷也与乘积αq成比例。因此，限制法向过载不仅要限制攻角α及αq，而且还要求在跨音速段及其以后具有大动压头的转变段弹道上的冲角为零或近似为零。这样导弹仅在重力的法向分量$-mg\cos\theta$作用下转变，这种转弯称为重力转弯或零攻角转弯。显然，重力转弯减小了速度的阻力损失，同时也在气动力急剧变化的跨音速段改善了控制系统的工作条件。

此外，从加速度的观点看，限制法向过载n_y也就是要限制$V\dot{\theta}$值，因此在速度增大以后$\dot{\theta}$的值更要受到限制。因$\dot{\varphi} = \dot{\theta} + \dot{\alpha}$，当$\alpha$保持为零时，$\dot{\theta} = \dot{\varphi}$，因此限制法向过载也意味着$\dot{\varphi}$值要受到限制。

(3) 程序俯仰角速度$\dot{\varphi}_{\alpha}(t)$和角加速度$\ddot{\varphi}_{\alpha}(t)$连续是保证导弹转弯时稳定飞行的基

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

本要求，否则 $\ddot{\varphi}_{cx}(t)$ 和 $\dot{\varphi}_{cx}(t)$ 的不连续就意味着要求控制力矩和舵偏角速度或发动机摆动角速度为无穷大，以致造成导弹失控；此外，$\dot{\varphi}_{cx}(t)$ 和 $\ddot{\varphi}_{cx}(t)$ 的过大也会引起法向过载和惯性力矩的过大，致使控制机构无法提供所需要的控制力矩。

(4) 应有可靠的级间分离和头体分离的飞行条件

导弹的落点散布与其级间或头体间能否可靠地分离密切相关。为了减小落点散布，就必须使分离时产生的扰动尽可能小。因此不仅要求分离前有一等程序($\varphi_{cx}(t)$ = 常值)飞行段，以减小因弹体转动而产生的扰动，而且还要求分离时冲角尽可能小，使分离时的气动力扰动不致过大。当然飞行高度较高时，由于气动力的影响已很微弱，也可以在有冲角情况下进行分离而不致引起大的分离扰动。

(5) 应有合适的再入条件

再入大气层时的弹道参数与主动段终点的弹道参数密切相关。通常远程导弹主动段终点速度倾角很小，因此再入时的再入角绝对值也很小，这将使弹头在大气层中的飞行时间增长，引起强烈的气动加热；另外，较小的再入角也使再入速度和落点速度倾角过小，从而降低了导弹的突防性能。因此，为改善导弹的再入条件，就要求主动段终点弹道倾角稍取大一些。

(6) 飞行程序应满足导弹的规定任务

根据导弹所执行任务的不同，合理选择相应的飞行程序，也是程序选择时的一项基本要求。如导弹执行射击范围内的落点散布最小的射击任务时，那么就应采用最小散布飞行程序方案；而当导弹执行最大射程时的射击任务时，那么就应采用最大射程飞行程序方案等等。

通常，对小射程或射程范围很窄的大射程导弹，往往只使用一条飞行程序。而对大射程或射程范围较宽的导弹，为确保其射击的有效性和战斗使用时的方便，一般将射程范围尽可能地划分为若干区域，对不同区域内的射击选择不同的飞行程序。

上述这些要求是对飞行程序的一般要求。对于特定型号或执行特定任务的导弹，在选择飞行程序时，还应考虑某些特殊要求。

12.5.2 飞行程序选择的方法

飞行程序选择的方法比较复杂，这里我们仅介绍一种适用于单级中近程导弹和两级导弹的第一级飞行程序的工程选择方法。

选择飞行程序是与解运动微分方程组紧密相关的，确定各级程序角时需要解其各自的运动方程。

选择飞行程序时的方程组通常是采用简化了的平面运动方程组：

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{P_e - X}{m} - g\sin\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{mV}(P_e + C_y^{\alpha} qSm)\alpha - \dfrac{1}{V}g\cos\theta \\ \dot{y} = V\sin\theta \\ \dot{x} = V\cos\theta \\ \alpha = A(\varphi_{cx} - \theta) \end{cases} \tag{12-5.4}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

因为导弹基本设计参数已定，故上述方程中要求的未知数为 $V(t)$、$\theta(t)$、$y(t)$、$x(t)$、$\alpha(t)$ 及 $\varphi_{cx}(t)$。

上述方程组中有五个方程式，而有六个未知数 $V(t)$、$\theta(t)$、$y(t)$、$x(t)$、$\alpha(t)$ 及 $\varphi_{cx}(t)$，显然，不能直接求其解。为解决这一矛盾，在飞行程序选择时，事先给定 $\alpha(t)$ 函数，然后再解上述方程组。这样，只要对函数 $\alpha(t)$ 进行适当调整，就可确定出合乎要求的飞行程序。

根据对飞行程序的要求，具体选择时将其分为垂直段、转变段和瞄准段(图 12 - 18)。

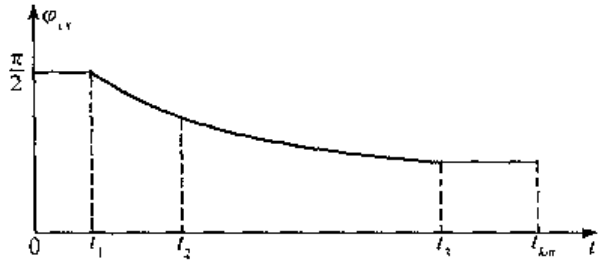


图 12 - 18

1. 垂直上升段($0 - t_1$)

在此段间，$\alpha = 0$，$\varphi_{cx}(t) = \theta = \frac{\pi}{2}$。$t_1$ 为垂直段结束时间，可依据前述要求确定。时间 t_1 不能选得过大，过大会使导弹转弯时冲角增大以致法向过载增大，同时重力损失速度也增大。t_1 也不能选得太小，因为 t_1 太小时会使阻力损失速度增大和使导弹转过头而不能保证关机时的速度倾角 $\Theta_K = \Theta_{KOPT}$。因此初步确定时，t_1 可从以下两个方面考虑：

(1) t_1 至少等于发动机达到额定工作状态的时间；

(2) t_1 应根据导弹重推比 ν_0 确定。导弹推重比 $\frac{P_0}{G_0} = \frac{1}{\nu_0}$ 与垂直上升时间 t_1 的关系是由经验曲线给出的(图 12 - 19)。由图看出，推重比越大，推力越大，主动段加速度越大，导

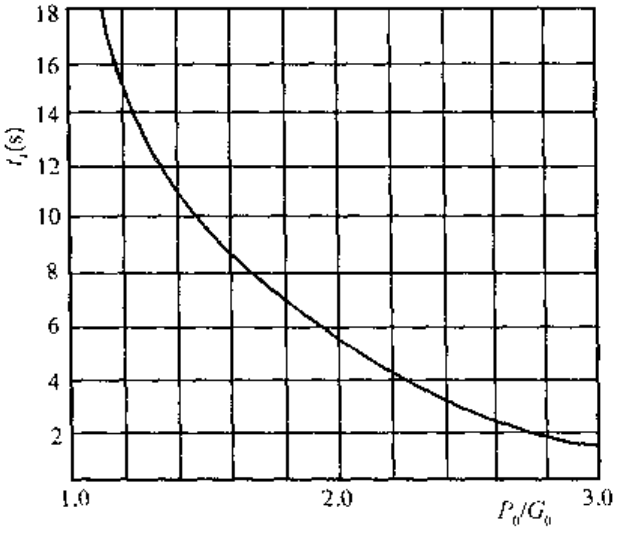


图 12 - 19

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

弹就能在较短时间内达到高度，这样，垂直上升时间 t_1 就可取得小些。反之，t_1 应取稍大一些。

2. 转弯段（$t_1 - t_3$）

t_3 为导弹转弯结束时间，它一般取最小射程对应的关机时间，此时的飞行程序角 $\varphi_{cx}(t_3)$ 基本上能使主动段终点的速度倾角为最佳速度倾角 Θ_{KOPT}。在此段中的 $t_2 - t_1$ 时间内，飞行冲角不等于零，所以称为有冲角飞行程序转弯段；在进入气动力急剧变化的大动压飞行段（$t_3 - t_2$）内，为减小空气动力对导弹转弯的影响，冲角应趋于零，导弹仅依靠重力的法向分量进行缓慢地重力转弯飞行。

在确定该段飞行程序时，往往是根据对冲角的要求而定，如给出冲角 α 随时间 t 变化的经验关系式

$$\alpha(t) = -4\tilde{\alpha}z(1-z) \tag{12-5.5}$$

其中

$$z = e^{a(t_1-t)} \tag{12-5.6}$$

$\tilde{\alpha}$ 为最大冲角的绝对值，a 为可调整的常数。

$\alpha(t)$ 的变化曲线如图 12-20 所示。其中 $\tilde{\alpha}$ 对应的时间 t^* 就决定于 a 值的大小，因为冲角 $\alpha = -\tilde{\alpha}$ 时，则由(12-5.5)式得 $z = \frac{1}{2}$，故

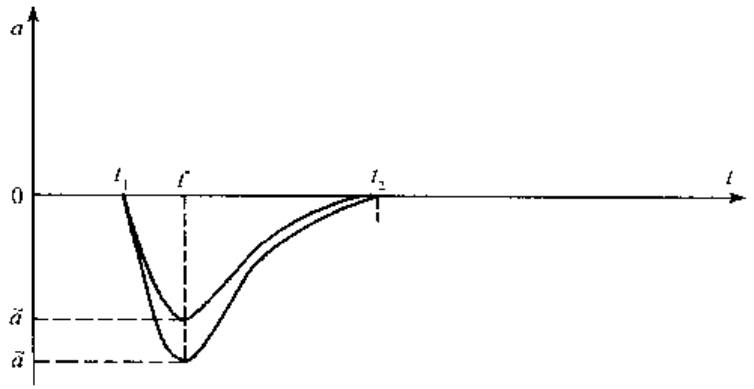


图 12-20

$$t^* = t_1 + \frac{\ln 2}{a} = t_1 + \frac{0.6931}{a} \tag{12-5.7}$$

由此可见，a 越大，t^* 则越小，即最大冲角来得越早，弹道转弯越快；另外 $\tilde{\alpha}$ 绝对值越大，$\alpha(t)$ 的绝对值也越大，导弹转弯也越快。因此，调整 $\tilde{\alpha}$ 及 a 的大小，就可调整弹道转弯的快慢。所以程序设计的过程就是通过调整 $\tilde{\alpha}$ 或 a，或两者同时调整以期达到所需要的俯仰角随时间变化规律的过程。

a 值取决于 $M(t_2) = 0.7 \sim 0.8$ 时冲角值足够小的条件，而 $M(t_2) = 0.7 \sim 0.8$ 时的速度大约为 $V(t_2) = 230 \sim 260$m/s，因此 t_2 可由速度近似计算式求出。因为

$$\begin{aligned} V(t_2) &= V_u(t_2) - \triangle V_1(t_2) \\ &= -g_0 P_{bo} \ln \mu_2 - g_0 P_{bo} \nu_0 I_1(\mu_2, \theta_k) \end{aligned} \tag{12-5.8}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

其中

$$\mu_2 = 1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t_2$$

假定一 θ,可计算出 $V(t_2)$ 与相应的时间 t_2。

确定 t_2 后,就可由选定的 $\alpha(t_2)/\tilde{\alpha}$ 比值确定 a。因为 $t = t_2$ 时

$$\frac{\alpha(t_2)}{\tilde{\alpha}} = -4z(t_2)[1 - z(t_2)]$$

即

$$4z^2(t_2) - 4z(t_2) - \frac{\alpha(t_2)}{\tilde{\alpha}} = 0$$

由此得

$$z(t_2) = \frac{1 - \sqrt{1 + \dfrac{\alpha(t_2)}{\tilde{\alpha}}}}{2}$$

故

$$a = \frac{-\ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 + \dfrac{\alpha(t_2)}{\tilde{\alpha}}}}{2}\right)}{t_2 - t_1} \qquad (12-5.9)$$

对不同的比值 $\alpha(t_2)/\tilde{\alpha}$ 可计算出不同的乘积 $a(t_2 - t_1)$,如表 12.4 所示。

表 12.4

$\alpha(t_2)/\tilde{\alpha}$	-0.05	-0.10	-0.15
$a(t_2 - t_1)$	4.3693	3.6629	3.2436

对于中近程导弹,一般 $\tilde{\alpha} = 2^0 \sim 3^0$,而 $a = 0.1 \sim 0.2$。当选定了 $\alpha(t)$ 后,就可积分主动段运动微分方程,解出运动参数 $V(t)$、$\theta(t)$、$x(t)$、$y(t)$、$\varphi_{cx}(t)$ 和对应的射程 L。当计算射程等于给定的最小射程 L_{min} 时,便可确定出程序转弯结束时间。

3. 瞄准段($t_3 - t_{kn}$)

t_{kn} 为飞行程序结束时间,一般取为最大射程所对应的关机时间。在此段上,为便于头体分离和减少落点散布,飞行程序角应为常值,即 $\varphi_{cx}(t) = \varphi_{cx}(t_3)$。根据气动静平衡理论,导弹在这一段内应作渐增的正冲角飞行,因而其运动方程组及其解算方法与有冲角时的转弯段基本相同,所不同的是飞行程序角 $\varphi_{cx}(t) = \varphi_{cx}(t_3)$ 是已知的,而冲角 $\alpha(t)$ 则是计算的,即

$$\alpha(t) = A[\varphi_{cx}(t_3) - \theta(t)]$$

经过求解各程序段运动方程组,即可求出与 $\tilde{\alpha}$(或 a)相对应的飞行程序角 $\varphi_{cx}(t)$ 及主动段终点运动参数(图 12-21)。

从这些曲线中选择使 $\Theta = \Theta_{KOPT}$ 的飞行程序,通常是采用简便的作图方法。即先画出不同 $\tilde{\alpha}$ 值的 $\Theta_{kn}(\tilde{\alpha})$ 曲线,然后根据不同 $\tilde{\alpha}$ 值时的终点参数应用最佳弹道倾角公式计算出

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

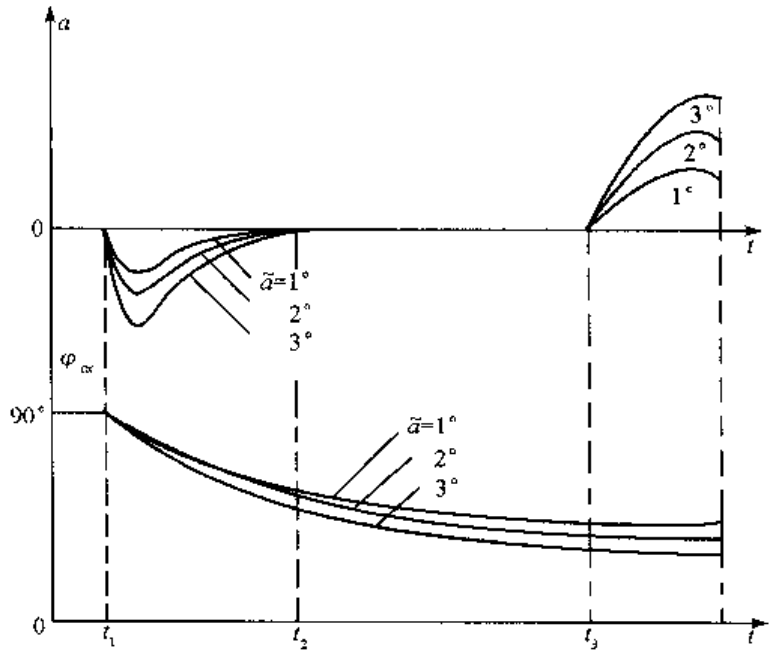


图 12 – 21

$\Theta_{KOPT}(\tilde{\alpha})$，并绘制成曲线，这样，两曲线之交点 $\Theta_m = \Theta_{KOPT}$ 所对应的 $\tilde{\alpha}^*$ 即为所选择的飞行程序对应的最大冲角的绝对值(图 12 – 22)，而 $\tilde{\alpha}^*$ 所对应的 $\varphi_\alpha(t)$ 即为所求得的飞行程序角。

应该指出的是，应用上述方法能够选择出符合实际要求的飞行程序，但并非一定是最大射程。然而，实际计算表明，用这种方法选择的程序基本上是在最大射程程序的范围内，特别是对近程导弹而言，其最大误差不超过 5%。

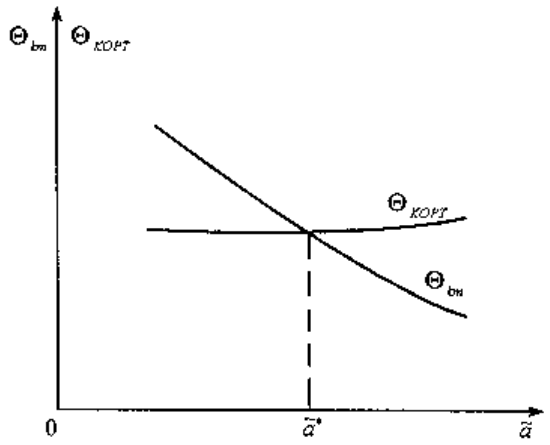


图 12 – 22

12.5.3 真空段弹道的最优飞行程序选择

这里所介绍的真空段弹道最优飞行程序角的选择是在如下基本假设下得出的：

(1) 地球扁率及其自转角速度对主动段终点运动参数的影响甚微，因而略去不计；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(2) 地球引力场为平行力场,引力加速度视为常值;

(3) 空气动力对导弹运动影响很小,因而近似认为导弹在真空引力场中飞行。

在上述假设下,导弹主动段运动微分方程组在发射坐标系(即惯性坐标系)中可简化成

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \dfrac{P}{m}\cos\varphi(t) \\ \dot{V}_y = \dfrac{P}{m}\sin\varphi(t) - g \\ \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \end{cases}$$

积分上式可得主动段终点运动参数

$$\begin{cases} V_{xk} = V_{x0} + g\int_0^{t_k} n(t)\cos\varphi(t)\mathrm{d}t \\ V_{yk} = V_{y0} + g\int_0^{t_k}[n(t)\sin\varphi(t) - 1]\mathrm{d}t \\ x_k = x_0 + V_{x0}t_k + g\int_0^{t_k}\left[\int_0^{t} n(t)\cos\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t \\ \quad = x_0 + V_{x0}t_k + g\int_0^{t_k}(t_k - t)n(t)\cos\varphi(t)\mathrm{d}t \\ y_k = y_0 + V_{y0}t_k + g\int_0^{t_k}(t_k - t)[n(t)\sin\varphi(t) - 1]\mathrm{d}t \end{cases}$$

式中 $n = \dfrac{P}{G}$ 为时间的函数。

对上式进行变分,可得飞行程序角偏差 $\delta\varphi$ 所引起的主动段终点参数偏差

$$\begin{cases} \delta V_{xk} = -g\int_0^{t_k} n(t)\sin\varphi(t)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t \\ \delta V_{yk} = g\int_0^{t_k} n(t)\cos\varphi(t)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t \\ \delta x_k = -g\int_0^{t_k}(t_k - t)n(t)\sin\varphi(t)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t \\ \delta y_k = g\int_0^{t_k}(t_k - t)n(t)\cos\varphi(t)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{12-5.10}$$

射程偏差为

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\delta V_{xk} + \frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\delta V_{yk} + \frac{\partial L}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial L}{\partial y_k}\delta y_k \tag{12-5.11}$$

将(12-5.10)代入上式,则得

$$\delta L = g\int_0^{t_k}\left\{-\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}(t_k - t) + \frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right]\sin\varphi(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial y_k}(t_k - t) + \frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right]\cos\varphi(t)\right\}n(t)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t$$

因为 $\delta\varphi(t)$ 可以任意取值,因此当 $\delta L = 0$ 时的必要条件是主动段弹道任一点的被积函数

$$-\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}(t_k - t) + \frac{\partial L}{\partial V_{xk}}\right]\sin\varphi(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial y_k}(t_k - t) + \frac{\partial L}{\partial V_{yk}}\right]\cos\varphi(t) = 0$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

于是得

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{\dfrac{\partial L}{\partial y_k}(t_k - t) + \dfrac{\partial L}{\partial V_{yk}}}{\dfrac{\partial L}{\partial x_k}(t_k - t) + \dfrac{\partial L}{\partial V_{xk}}} \qquad (12-5.12)$$

此式称为任意射程时导弹的俯仰程序角计算式。

由于(12－5.12)式是在一定假设条件下推导出的,因而它仅仅是真空段弹道的最优程序角的近似计算式。对远程弹道导弹而言,用(12－5.12)式计算飞行程序角将会引起较大的误差,但如果主动段终点的重力加速度用该段的平均值代替时,则误差可相应地减少。

应当指出,用式(12－5.12)来确定最优飞行程序的过程,实际上是一个迭代过程,因为射程对于关机点运动参数的偏导数是未知的。因此,具体计算时应依据事先初步选定的俯仰角程序进行弹道解算,以确定各偏导数,尔后应用第一次计算获得的各偏导数及式(12－5.12)来确定俯仰程序角的第二次近似值,如此重复计算,直至满足要求时为止。迭代计算的收敛速度则取决于程序角 $\varphi(t)$ 的首次近似对最佳程序角的逼近程度。

12.5.4 导弹的飞行程序

以上所讨论的仅是飞行程序选择的一般工程方法和对飞行程序的基本要求。但对担负不同任务的导弹来说,将根据导弹的具体任务提出这样或那样的一些特殊要求,设计出满足这些特殊要求的实际飞行程序。

1. 单级导弹的飞行程序

飞行程序角 $\varphi_{cx}(t)$ 的变化曲线如图 12－23 所示。

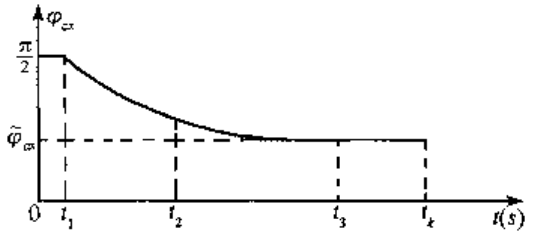


图 12－23

由图看出,导弹垂直飞行至 t_1 时开始程序转弯。在 $t_2 - t_1$ 时间内,由于飞行速度不大,故转弯较快,以后转弯逐渐缓慢直至 t_3。在 t_3 直至主动段关机时间 t_k 的一段时间内,导弹作常值程序角飞行。

2. 两级导弹的飞行程序

两级导弹一般都是远程导弹。远程导弹的飞行程序角 $\varphi_{cx}(t)$ 随 t 变化的曲线如图 12－24 所示。它由以下几段组成:

(1) 一级垂直飞行段$(0 - t_1)$

在这一段, $\alpha = 0, \varphi = \varphi_{cx} = \theta = \dfrac{\pi}{2}$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

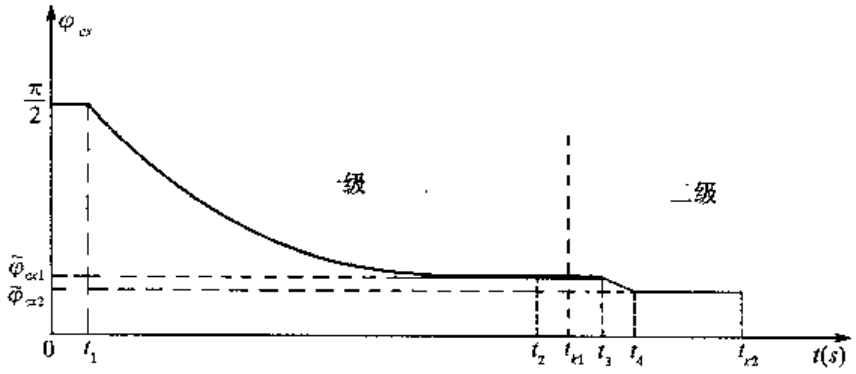


图 12 - 24

(2) 一级转弯段(t_1 - t_2)

在这一段,事先给出常用的冲角 $\alpha(t)$ 经验关系式

$$\alpha(t) = 4\tilde{\alpha}e^{a(t_1-t)}[e^{a(t_1-t)} - 1] \qquad (12-5.13)$$

通过调整 $\tilde{\alpha}$ 或 a 或同时调整 $\tilde{\alpha}$ 及 a 和解算弹道微分方程组计算出 $\alpha(t)$,使得飞行程序角

$$\varphi_{cx}(t_2) = \frac{\alpha(t_2)}{A} + \theta(t_2) = \tilde{\varphi}_{cx1}$$

$\tilde{\varphi}_{cx1}$ 为预先给定的飞行程序角。

(3) 一级常值程序段(t_2 - t_{k1})

$$\varphi_{cx}(t_{k1}) = \tilde{\varphi}_{cx1}$$

t_{k1} 为一二级分离时间。

(4) 二级常值程序段(t_{k1} - t_3)

$$\varphi_{cx}(t_3) = \tilde{\varphi}_{cx1}$$

t_3 为二级等斜率转弯起始时间。

(5) 二级等斜率转弯段(t_3 - t_4)

$$\varphi_{cx}(t) = \tilde{\varphi}_{cx1} + \dot{\tilde{\varphi}}_{cx}\triangle t$$
$$\varphi_{cx}(t_4) = \tilde{\varphi}_{cx2}$$

其中

$$\triangle t = t - t_3 \qquad t_3 \leqslant t \leqslant t_4$$

t_4 为二级等斜率转弯段结束时间。$\dot{\tilde{\varphi}}_{cx}$ 为飞行程序角变化率。

(6) 二级等程序段(t_4 - t_{k2})

$$\varphi_{cx}(t_{k2}) = \varphi_{cx}(t_4) = \tilde{\varphi}_{cx2}$$

其中 t_{k2} 为头体分离时间;$\tilde{\varphi}_{cx2}$ 为事先给定的头体分离时的飞行程序角。

由图 12 - 24 看出,第一级飞行程序由垂直段、转弯段和瞄准段(常值程序段)三部分组成,它与一级导弹的飞行程序角随时间变化的规律相似。在第二级程序中,为便于一二级分离和减小分离时干扰对导弹运动的影响,在二级初始飞行时设有一不长时间的常值程序段。为了在主动段关机点能够达到给定的程序俯仰角 $\tilde{\varphi}_{cx2}$,另外还设有一等斜率飞行

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

程序段。紧接等斜率下降段后面的一段便为二级瞄准段(即二级常值程序段)。

飞行程序的实现方法有多种多样,根据不同的技术条件和要求,可采用不同的实现方法。如采用将飞行程序角的变化规律 $\varphi_{cx}(t)$ 制成机械的程序凸轮机构,导弹起飞后由凸轮机构再现程序角 $\varphi_{cx}(t)$ 的变化规律,从而控制导弹飞行的方法。飞行程序的现实也可不采用凸轮机构,而是将飞行程序编制成计算机软件,预先装订在弹载计算机内,导弹飞行时,再由弹上计算机提供 $\varphi_{cx}(t)$ 的控制信息,以实现对导弹运动的控制方法。

3. 某些弹道导弹的飞行程序

有些弹道导弹的飞行程序角选择,不是通过预先给出冲角 $\alpha(t)$ 来推求 $\varphi_{cx}(t)$ 的,而是直接给出 φ_{cx} 随时间 t 变化的规律。导弹垂直起飞后的飞行程序角随时间的变化规律,有的选择为二次抛物线,也有的采用两段直线的形式,如图 12 - 25 所示。飞行程序角随时间 t 变化的数学关系式为

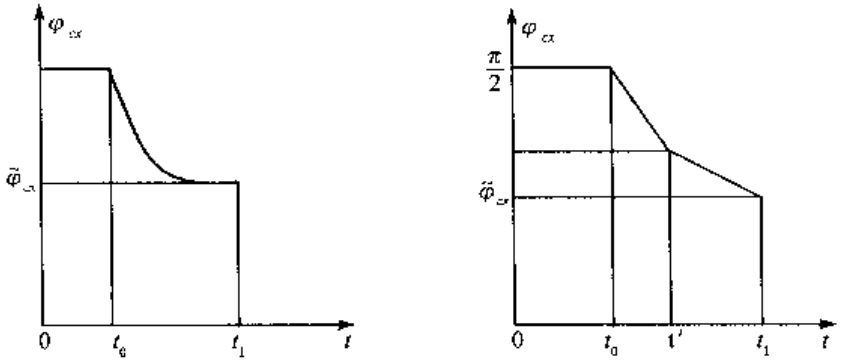


图 12 - 25

$$\varphi_{cx}(t) = at^2 + bt + c \qquad t_0 < t < t_1 \tag{12-5.14}$$

或

$$\varphi_{cx}(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dot{\varphi}_{cx}(t - t_0) & t_0 \leqslant t \leqslant t'_1 \\ \varphi_{cx}(t) - \dot{\varphi}_{cx}(t - t'_1) & t'_1 \leqslant t \leqslant t_1 \end{cases} \tag{12-5.15}$$

而抛物线方程系数 a、b、c 和直线斜率 $\dot{\varphi}_{cx}$,可由 $t = t_1$ 时 $\alpha = 0$、俯仰角值为 $\tilde{\varphi}_{cx}$ 以及允许俯仰角速度的大小来确定。

另外,也有些弹道导弹的飞行程序角随时间 t 变化的关系式采用如下形式:

$$\varphi_{cx}(t_j) = \varphi_{cx}(t_{j-1}) + \dot{\varphi}_{cx}(t_{j-1})\triangle t_j \tag{12-5.16}$$

其中

$$\dot{\varphi}_{cx}(t_{j-1}) = \begin{cases} 0 & t_j < T_{cx1} \\ C_{xa1}t_j + C_{xb1} & t_j \leqslant T_{cx2} \\ C_{xa2}t_j + C_{xb2} & t_j \leqslant T_{cx3} \\ C_{xa3}t_j + C_{xb3} & t_j \leqslant T_{cx4} \\ C_{xa4}t_j + C_{xb4} & t_j \leqslant T_{cx5} \\ 0 & t_j > T_{cx5} \end{cases} \tag{12-5.17}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\triangle t_j = t_j - t_{j-1}$$

t_j 为导弹从起飞零秒计至 j 时刻的飞行累加时间；

t_{j-1} 为从导弹起飞零秒计至 $j-1$ 时刻的飞行累加时间；

Δt_j 为 t_{j-1} 时刻至 t_j 时刻的时间间隔或称之为计算步长；

$\varphi_{\alpha}(t_{j-1})$ 为 $j-1$ 时刻导弹飞行程序角值；

$\dot{\varphi}_{\alpha}(t_{j-1})$ 为 $j-1$ 时刻的导弹飞行程序角速度值；

$T_{\alpha i}(i = 1,2,3,4,5)$ 为飞行程序角速度拟合曲线节点时间；

$C_{\alpha i}, C_{\dot{\alpha} i}(i = 1,2,3,4,5)$ 为飞行程序角速度拟合曲线系数，是射程的函数。在一定射程范围内，它们随射程的改变而变化不明显，因此可取为常值。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

附录 1　四元数简介

1　四元数的概念

1.1　四元数的定义、性质和运算法则

1.1.1　四元数的定义

设有一复数

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{i}q$$

q_0 为 $\boldsymbol{Q}$ 的实数部分，$\boldsymbol{i}q$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的虚数部分。

如果将 $\boldsymbol{i}q$ 扩展到三维空间，即

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{Q}$ 为四元数，或称超复数；$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为单位矢量，q_0、q_1、q_2、q_3 均为实数。换句话说，四元数是由一个实数单位和三个虚数单位组成的数。

有时可将四元数 $\boldsymbol{Q}$ 表示成

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{q} \tag{2}$$

或

$$\boldsymbol{Q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \tag{3}$$

1.1.2　四元数运算法则

1）顺时针相乘为正，逆时针相乘为负，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji} \\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{kj} \\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{ik} \\ \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \end{cases}$$

2）加法运算适合交换率和结合率

设有两个四元数

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{P} = P_0 + \boldsymbol{p}$$

则

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$$

3）乘法适合结合率、分配率，但不适合交换率

若有四元数

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 = q_0 + \boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{P} = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3 = p_0 + \boldsymbol{p}$$

则

$$\boldsymbol{Q} * \boldsymbol{P} = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) * (p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3)$$
$$= q_0p_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}p_0 + q_0\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})$$

而

$$\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q} = p_0q_0 - (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p}q_0 + p_0\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})$$

由于

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$$

所以

$$\boldsymbol{Q} * \boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q}$$

四元数乘积的矩阵形式表示法为

$$\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{V}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

称为核矩阵。由上式看出，用矩阵形式进行乘法运算时，如将四元数次序颠倒，则需将核矩阵转置。

4) 单元、零元和负四元数

四元数单元：$\boldsymbol{I} = 1 + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$

四元数零元：$\boldsymbol{0} = 0 + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$

四元数负元：$-\boldsymbol{Q} = -q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3$

5) 逆元

四元数逆元以 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 表示，即

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \frac{1}{q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3} = \frac{\boldsymbol{Q}^*}{N^2(\boldsymbol{Q})} \tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}^* = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3 \tag{7}$$
$$N(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$\boldsymbol{Q}^*$ 称为四元数 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭四元数，$N(\boldsymbol{Q})$ 称为四元数的范数。

若 $N(\boldsymbol{Q}) = 1$，则

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^*$$

即逆四元数等于它的共轭四元数，这时四元数 $\boldsymbol{Q}$ 是正则的，即称为规范四元数。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

6) 除法是唯一的

由于乘法是不可交换的,故除法分左除和右除。

例如,Q、P、X 为三个四元数,若

$$Q * X = P$$

左乘以 Q^{-1},则

$$X = Q^{-1} P$$

若

$$X * Q = P$$

右乘以 Q^{-1},则

$$X = P * Q^{-1}$$

因 $Q^{-1} * P \neq p * Q^{-1}$,故两 X 不相等。

1.1.3 四元数的主要性质

1) 四元数之和的共轭四元数等于共轭四元数之和

$$(Q + P + I)^* = Q^* + P^* + I^* \tag{8}$$

2) 四元数之积的共轭四元数等于共轭四元数以相反顺序相乘之积

$$(Q * P * I)^* = I^* * P^* * Q^* \tag{9}$$

3) 四元数之积的逆等于其四元数之逆以相反顺序相乘之积

$$(Q * P * I)^{-1} = I^{-1} * P^{-1} * Q^{-1} \tag{10}$$

4) 四元数之积的范数等于其因子范数之积

$$\| I_1 \cdot I_2 \cdots I_n \| = \| I_1 \| \cdot \| I_2 \| \cdots \| I_n \| \tag{11}$$

5) 仅在因子中的一个等于零时,两四元数之积才等于零。

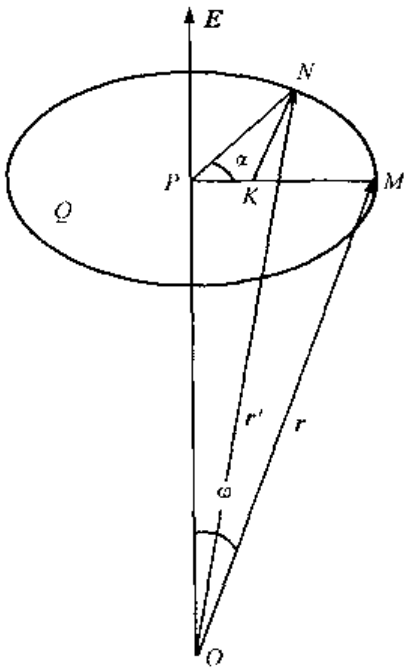


图 1

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

1.2 用四元数旋转变换表示空间定点旋转

由欧拉定理知,空间矢量绕定点旋转,在瞬间必须是绕--欧拉轴旋转一角度,如图 1 所示。图中矢量 $\boldsymbol{r}$ 绕定点 O 旋转至 $\boldsymbol{r}'$,设 $\boldsymbol{E}$ 为矢量 $\boldsymbol{r}$ 绕定点 O 旋转的瞬时欧拉轴,其转角为 α,α 在垂直于 $\boldsymbol{E}$ 轴的平面 $\boldsymbol{Q}$ 上,P 为 $\boldsymbol{E}$ 轴在平面 $\boldsymbol{Q}$ 上的交点,图中 $\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{r}$,作 $KN \perp MP$,则

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{ON} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MK} + \boldsymbol{KN} \tag{12}$$

而

$$|\boldsymbol{MK}| = |\boldsymbol{MP}| - |\boldsymbol{KP}| = |\boldsymbol{MP}| - |\boldsymbol{NP}|\cos\alpha = |\boldsymbol{MP}|(1-\cos\alpha)$$

则

$$\boldsymbol{MK} = (1-\cos\alpha)(\boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OM}) \tag{13}$$

由于

$$\boldsymbol{OP} = (\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} \tag{14}$$

而 $\boldsymbol{KN}$ 矢量的方向与$(\boldsymbol{OP}\times\boldsymbol{OM})$ 方向相同,其长度

$$|\boldsymbol{KN}| = |\boldsymbol{MP}|\sin\alpha = |\boldsymbol{r}|\sin\varphi\sin\alpha$$

故

$$\boldsymbol{KN} = (\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r})\sin\alpha$$

将其代入(12) 式得

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} + (\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r})\sin\alpha \tag{15}$$

再根据矢量 $\boldsymbol{E}$ 和角 α 定义一四元数

$$\boldsymbol{Q} = |\boldsymbol{E}|(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}) \tag{16}$$

研究四元数变换

$$\boldsymbol{Q}*\boldsymbol{r}*\boldsymbol{Q}^{-1} = |\boldsymbol{E}|(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2})*\boldsymbol{r}*\left[|\boldsymbol{E}|(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2})\frac{1}{|\boldsymbol{E}|^2}\right]$$

经过推导得

$$\boldsymbol{Q}*\boldsymbol{r}*\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)(\boldsymbol{r}*\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} + (\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} + \boldsymbol{r})\sin\alpha \tag{17}$$

比较(15) 和(17) 式,两者完全相同,因此

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{Q}*\boldsymbol{r}*\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{18}$$

即 $\boldsymbol{r}$ 与其绕 $\boldsymbol{E}$ 轴旋转 α 角后的 $\boldsymbol{r}'$ 之间的关系可用(18) 式表示,$\boldsymbol{Q}$ 叫做 $\boldsymbol{r}'$ 对 $\boldsymbol{r}$ 的四元数。

反之,$\boldsymbol{r}'$ 绕 $-\boldsymbol{E}$ 轴旋转 α 角必然得 $\boldsymbol{r}$,则同理得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Q}^{-1}*\boldsymbol{r}'*\boldsymbol{Q}$$

$\boldsymbol{Q}$ 叫做 $\boldsymbol{r}$ 对 $\boldsymbol{r}'$ 的四元数。

当旋转四元数 $\boldsymbol{Q}$ 为规范化四元数,即

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^*$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

时,则有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}^* \tag{19}$$

若 $\boldsymbol{r}$ 绕 $\boldsymbol{E}$ 轴旋转 α 角后得 $\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}'$ 对 $\boldsymbol{r}$ 的规范化四元数为 $\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{r}'$ 再绕 $\boldsymbol{N}$ 轴旋转 β 角后得 $\boldsymbol{r}''$,$\boldsymbol{r}''$ 对 $\boldsymbol{r}'$ 的规范化四元数为 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{r}''$ 对 $\boldsymbol{r}$ 的规范化四元数为 $\boldsymbol{R}$,则

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{r}' * \boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}^* * \boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r} * (\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q})^* = \boldsymbol{R} * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{R}^* \tag{20}$$

式中

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q} \tag{21}$$

设矢量 $\boldsymbol{r}$ 与弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 固连,坐标为 x_1, y_1, z_1。$oxyz$ 为惯性坐标系,矢量 $\boldsymbol{r}'$ 与它固连,其坐标为 x, y, z。当 $oxyz$ 坐标系转到与 $ox_1y_1z_1$ 重合时,$\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 相重合,那么,由(19)式得

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}^* = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) * (0 + \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}y_1 + \boldsymbol{k}z_1) * (q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3)$$

经展开整理,其矩阵表达式可写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_0^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$\boldsymbol{a}$ 为用四元数表示的弹体坐标系与惯性坐标系间的关系矩阵。

如果 $\Delta W_x, \Delta W_y, \Delta W_z$ 为导弹相对惯性坐标系各轴的视速度增量,$\Delta W_{x1}, \Delta W_{y1}, \Delta W_{z1}$ 为导弹相对弹体坐标系各轴的视速度增量,则由(22)式可得

$$\begin{bmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \begin{bmatrix} \Delta W_{x1} \\ \Delta W_{y1} \\ \Delta W_{z1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

反过来可得

$$\begin{bmatrix} \Delta W_{x1} \\ \Delta W_{y1} \\ \Delta W_{z1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{bmatrix} \tag{25}$$

$\boldsymbol{a}^T$ 为 $\boldsymbol{a}$ 矩阵的转置矩阵。

2 四元数的微分方程及其解

2.1 四元数的微分方程

在利用欧拉角确定刚体在空间的姿态时,需要建立刚体旋转角速度与欧拉角导数之

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

间的欧拉方程，并通过解欧拉方程求出任一瞬时的欧拉角。因欧拉方程为非线性方程，且当大姿态角（$\psi = \frac{\pi}{2}$）时方程是奇异的，故可用四元数来代替欧拉角。

为用四元数研究刚体的姿态变化，需要建立刚体旋转角速度与四元数导数之间的关系方程。由 $oxyz$ 坐标系旋转到 $ox_1y_1z_1$ 坐标系的途径是多种多样的。但围绕某个轴旋转 α 角使 $oxyz$ 达到 $ox_1y_1z_1$ 的方法是最经济的，计算工作量最少，然而关键要求得每时每刻的瞬时轴和 α，即每时每刻的四元数 $\boldsymbol{Q}$ 值。下面介绍已知前一时刻的 $\boldsymbol{Q}$ 值，如何求得这一时刻 $\boldsymbol{Q}$ 值的问题。

设 $oxyz$ 相对 $ox_1y_1z_1$ 以 ω 作旋转运动，且其四元数为 $\boldsymbol{Q}^*$，那么 $ox_1y_1z_1$ 以角速度 ω 相对于 $oxyz$ 运动，其四元数为 $\boldsymbol{Q}$。若令 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $ox_1y_1z_1$ 固连，$\boldsymbol{r}$ 与 $oxyz$ 固连，则

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{26}$$

由于

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r}_0 * \boldsymbol{Q}^* \\
\boldsymbol{r}_0 &= \boldsymbol{Q}^* * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q} \\
\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{r}_0 * \boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r}_0 * \dot{\boldsymbol{Q}}^* \\
&= \dot{\boldsymbol{Q}} \times \boldsymbol{Q}^* * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{Q}^* * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q} * \dot{\boldsymbol{Q}}^*
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} * \boldsymbol{Q}^* &= 1 \\
\dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{Q}^* &= -\boldsymbol{Q} * \dot{\boldsymbol{Q}}^*
\end{aligned}$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{Q}^* * \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} * \dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{Q}^* \tag{27}$$

将 $\dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{Q}^* = (\dot{q}_0 + \dot{\boldsymbol{q}}) * (q_0 - \boldsymbol{q})$ 展开，且顾及

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

$$\dot{q}_0 q_0 + \dot{q}_1 q_1 + \dot{q}_2 q_2 + \dot{q}_3 q_3 = 0$$

和只保留矢量部分，则得

$$\dot{\boldsymbol{Q}} * \boldsymbol{Q}^* = \dot{q}_0 q_0 - q_0 \boldsymbol{q} + \dot{\boldsymbol{q}} q_0 - \dot{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q} = \overline{\dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}^*}$$

将上式代入(27)式

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \overline{\dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}^*} * \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} * \overline{\dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}^*} = 2(\overline{\dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}^*} \times \boldsymbol{r}) \tag{28}$$

且与(26)式比较得

$$\overline{\dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}^*} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \tag{29}$$

若 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$ 在弹体系三个轴上的投影分别为 $-\frac{1}{2}\omega_{x1}$，$-\frac{1}{2}\omega_{y1}$，$-\frac{1}{2}\omega_{z1}$，，将(29)式展开，并取矢量部分，等式两边同项相等，于是得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} -\dot{q}_0 q_1 + q_0 \dot{q}_1 - \dot{q}_2 q_3 + \dot{q}_3 q_2 = -\dfrac{1}{2}\omega_{x1} & ① \\ -\dot{q}_0 q_2 + q_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 q_0 - \dot{q}_3 q_1 = -\dfrac{1}{2}\omega_{y1} & ② \\ -\dot{q}_0 q_3 - \dot{q}_1 q_3 + \dot{q}_2 q_1 + \dot{q}_3 q_0 = -\dfrac{1}{2}\omega_{z1} & ③ \\ \dot{q}_0 q_0 + q_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 q_2 + \dot{q}_3 q_3 = 0 & ④ \end{cases}$$

求解上式，即 $-\frac{1}{2}q_0 \times ④ + \frac{q_1}{2} \times ① + \frac{q_2}{2} \times ② + \frac{q_3}{2} \times ③$ 得

$$\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_1\omega_{x1} + q_2\omega_{y1} + q_3\omega_{z1}) \tag{30}$$

用同样的方法可求得 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ 的表达式，综合上式后可写成

$$[\dot{\boldsymbol{Q}}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{Q}] \tag{31}$$

式中

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{x1} & -\omega_{y1} & -\omega_{z1} \\ \omega_{x1}0 & 0 & \omega_{z1} & -\omega_{y1} \\ \omega_{y1} & -\omega_{z1} & 0 & \omega_{x1} \\ \omega_{z1} & \omega_{y1} & -\omega_{x1} & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

2.2 四元数微分方程的解

由前面分析可知，求解欧拉角的欧拉方程组是一个非线性方程组，有一个奇点，在此点方程是奇异的。而从上面的四元数微分方程建立看出，它是由四个线性方程组成的线性方程组，所以与其它的相比，四元数方程具有以下特点：

1) 与欧拉角速度方程不同，它是一组非退化的线性微分方程，没有奇点，原则上总是可解的；

2) 与方向余弦方程相比，四元数有最低数目的非退化参数和最低数目的联系方程，通过四元数的形式运算，可单值的给定正交变换的运算；

3) 四元数可明确地表示出刚体运动的两个重要物理参数，即旋转欧拉轴和旋转角；

4) 四元数代数法，可用超复数空间矢量来表示欧拉旋转矢量，超复数空间与三维空间相对应。

因此，用四元数来研究刚体的运动特性是最方便的。

四元数方程组是一个线性微分方程组，常用的解算方法有：四元数的级数表示法，四元数方程解的积分表示法、四元数方程的递推解法和四元数方程的数值积分法。这里仅介绍四元数的递推解法。

四元数的递推解是指已知前一时刻的四元数 $\boldsymbol{Q}(t)$ 和经过 Δt 时间的刚体运动信息，求 $t + \Delta t$ 时的四元数 $\boldsymbol{Q}(t + \Delta t)$。

由(31)式知，四元数微分方程

$$[\dot{\boldsymbol{Q}}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{Q}]$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

的解为

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{Q}(t)\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}t} \tag{33}$$

因为

$$\int_t^{t+\Delta t}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}t = \Delta\theta = \Delta\theta_{x1}\boldsymbol{i} + \Delta\theta_{y1}\boldsymbol{j} + \Delta\theta_{z1}\boldsymbol{k}$$

将 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 在 $t \sim t+\Delta t$ 期间的角度增量代入(33)式,可得

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{Q}(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\Delta\theta} = \boldsymbol{Q}(t)\left[1 + \frac{1}{2}\Delta\theta + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta\theta\right)^2 + \cdots\cdots\right] \tag{34}$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta\theta^2 &= (\Delta\theta_{x1}\boldsymbol{i} + \Delta\theta_{y1}\boldsymbol{j} + \Delta\theta_{z1}\boldsymbol{k})(\Delta\theta_{x1}\boldsymbol{i} + \Delta\theta_{y1}\boldsymbol{j} + \Delta\theta_{z1}\boldsymbol{k})\\ &= -(\Delta\theta_{x1}^2 + \Delta\theta_{y1}^2 + \Delta\theta_{z1}^2) = -\Delta\theta_j^2\\ \Delta\theta^3 &= \Delta\theta^2\cdot\Delta\theta = -\Delta\theta_j^2(\Delta\theta_{x1}\boldsymbol{i} + \Delta\theta_{y1}\boldsymbol{j} + \Delta\theta_{z1}\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{Q}(t)\Big[&\left(1 - \frac{1}{8}\Delta\theta_j^2\right) + \Delta\theta_{x1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\boldsymbol{i}\\ &+ \Delta\theta_{y1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\boldsymbol{j} + \Delta\theta_{z1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\boldsymbol{k} + \cdots\Big]\end{aligned} \tag{35}$$

整理成矩阵形式,且令 $\Delta t = T_0$ 为采样周期,$\boldsymbol{Q}(t)$ 为前一周期之 $\boldsymbol{Q}$ 值,j 表示本周期,$j-1$ 表示前一个采样周期,则得四元数递推解的标量式

$$\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix}q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2\\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1\\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0\end{bmatrix}_{j-1}\begin{bmatrix}1 - \frac{1}{8}\Delta\theta_j^2\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{x1}\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{y1}\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{z1}\end{bmatrix}_j \tag{36}$$

或写成

$$[\boldsymbol{Q}]_j = [\boldsymbol{Q}]_{j-1}\begin{bmatrix}1 - \frac{1}{8}\Delta\theta_j^2\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{x1}\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{y1}\\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\Delta\theta_j^2\right)\Delta\theta_{z1}\end{bmatrix}_j \tag{37}$$

由上式看出,只要测得弹体系中三个轴的角度增量,就能连续计算四元数 $\boldsymbol{Q}$ 之值。

2.3 四元数初始值的确定

当用(36)或(37)式求某 j 时刻的四元数 $\boldsymbol{Q}$ 之值时,除要知道该时刻的欧拉角增量外,

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

尚需知道 $j-1$ 时刻的四元数 $\boldsymbol{Q}$ 之值。当将该方法用于计算导弹运动姿态时必须知道导弹起飞瞬时的四元数之值。

在理想情况下，导弹起飞前垂直竖在发射台上，其弹体坐标系 ox_1 轴与惯性坐标系 oy 重合，oy_1 轴与 ox 轴反向，oz_1 轴与 oz 轴重合，此时 $\Delta\varphi_0 = \psi_0 = \gamma_0 = 0$，$\varphi = 90^\circ$。当由于某种干扰引起对准误差，即存在初始姿态角误差 $\Delta\varphi_0, \psi_0, \gamma_0$ 时，可将弹体坐标系视为是绕惯性坐标系轴连续旋转三次的结果，它们对应的四元数分别为

$$\boldsymbol{Q}_1 = \cos\left(\frac{90^\circ + \Delta\varphi_0}{2}\right) + \boldsymbol{k}\sin\left(\frac{90^\circ + \Delta\varphi_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) + \boldsymbol{k}\left(1 + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \cos\frac{\psi_0}{2} + \boldsymbol{j}\sin\frac{\psi_0}{2} = 1 - \boldsymbol{j}\frac{\psi_0}{2}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \cos\frac{\gamma_0}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\gamma_0}{2} = 1 - \boldsymbol{i}\frac{\gamma_0}{2}$$

根据刚体连续多次转动的结果，可用一次转动等效的计算方法，将

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{Q}_1 * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}_1^*$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{Q}_2 * \boldsymbol{r}_1 * \boldsymbol{Q}_2^*$$

依次代入式

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{Q}_3 * \boldsymbol{r}_2 * \boldsymbol{Q}_3^*$$

则得

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{Q}_3 * \boldsymbol{Q}_2 * \boldsymbol{Q}_1 * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}_1^* * \boldsymbol{Q}_2^* * \boldsymbol{Q}_3^* = \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{Q}^*$$

式中

$$\begin{cases} Q = Q_3 * Q_2 * Q_1 \\ Q^* = Q_1^* * Q_2^* * Q_3^* = (Q_3 * Q_2 * Q_1)^* \end{cases} \tag{38}$$

于是，当 $t = t_0$ 时有

$$\begin{cases} q_0 = q_{00} - \dfrac{\gamma_0}{2} q_{20} \\ q_1 = q_{10} + \dfrac{\gamma_0}{2} q_{30} \\ q_2 = q_{20} + \dfrac{\gamma_0}{2} q_{00} \\ q_3 = q_{30} - \dfrac{\gamma_0}{2} q_{10} \end{cases} \tag{39}$$

式中

$$\begin{cases} q_{00} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \\ q_{10} = -\dfrac{\psi_0}{2} q_{00} \\ q_{20} = \dfrac{\psi_0}{2} q_{30} \\ q_{30} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \end{cases} \tag{40}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

当 $\gamma_0 = 0$,而只有对准误差 $\Delta\varphi_0, \psi_0$ 时,由(39)和(40)式可得四元数初值为

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \\ q_1 = -\dfrac{\psi_0}{2} q_{00} \\ q_2 = \dfrac{\psi_0}{2} q_{30} \\ q_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \end{cases} \tag{41}$$

在理想发射情况下,即 $\Delta\varphi_0 = \psi_0 = \gamma_0 = 0$ 时,四元数初值为

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ q_1 = q_2 = 0 \\ q_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{42}$$

从(39)式看出,四元数初值的确定,首先要测得导弹初始对准误差测量值 $\Delta\varphi_0, \psi_0, \gamma_0$。由于对准时导弹的晃动和测量的动态误差,所以常用数字滤波技术进行数据处理。

3 姿态误差信号的四元数表示法

导弹起飞后,姿态稳定系统首先要保证导弹的三轴稳定,其次要通过改变俯仰角来实现程序飞行。当进行制导时系统还要根据制导规律调整导弹姿态以控制推力方向。无论是姿态控制还是姿态稳定,都可看作是将弹体从实际位置转到给定的理想位置。

当导弹采用速率捷联惯性制导方案时,双轴速率陀螺仪测量值是弹体相对弹体系各轴的角速率分量在一个采样周期内的积分,即角度增量。由于控制导弹转动的力矩是施加在弹体坐标轴上的,所以姿态控制信号无须再经过任何转换。但是消除姿态偏差的姿态控制信号是参照惯性坐标系统给出的,为此必须将此信号转换到弹体坐标系内。

设实际弹体系 $ox_1y_1z_1$ 绕某瞬时轴 $\boldsymbol{E}$ 旋转 Φ 角可得到理想位置时的弹体坐标系 $ox_0y_0z_0$,两坐标系间的四元数为 $\boldsymbol{R}$,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \cos\frac{\Phi}{2} + \boldsymbol{E}\sin\frac{\Phi}{2} \\ &= \cos\frac{\Phi}{2} + \boldsymbol{i}_1 E_x \sin\frac{\Phi}{2} + \boldsymbol{i}_2 E_y \sin\frac{\Phi}{2} + \boldsymbol{i}_3 E_z \sin\frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

式中 E_x, E_y, E_z 为 $\boldsymbol{E}$ 在惯性坐标系 $oxyz$ 各轴上的投影。

当记

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$r_0 = \cos\frac{\Phi}{2} = 1$$

$$r_1 = E_x \sin\frac{\Phi}{2} = \frac{E_x\Phi}{2}$$

$$r_2 = E_y \sin\frac{\Phi}{2} = \frac{E_y\Phi}{2}$$

$$r_3 = E_z \sin\frac{\Phi}{2} = \frac{E_z\Phi}{2}$$

且令

$$\varepsilon_x = E_x\Phi, \varepsilon_y = E_y\Phi, \varepsilon_z = E_z\Phi$$

为在惯性坐标系各轴上的误差信号时,则得

$$\begin{cases} r_0 = 1, r_1 = \dfrac{\varepsilon_x}{2}, r_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{2}, r_3 = \dfrac{\varepsilon_z}{2} \\ \boldsymbol{R} = 1 + \boldsymbol{i}_1 r_1 + \boldsymbol{i}_2 r_2 + \boldsymbol{i}_3 r_3 \end{cases} \tag{43}$$

再设理想位置弹体坐标系 $ox_0y_0z_0$ 相对惯性坐标系 $oxyz$ 的四元数为 $\boldsymbol{G}$,即

$$\boldsymbol{G} = g_0 + \boldsymbol{i}_1 g_1 + \boldsymbol{i}_2 g_2 + \boldsymbol{i}_3 g_3$$

和弹体坐标系相对惯性坐标系的四元数为 $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{i}_1 q_1 + \boldsymbol{i}_2 q_2 + \boldsymbol{i}_3 q_3$$

则实际弹体坐标系转换到理想位置弹体坐标系可视为是实际弹体坐标系转到惯性坐标系,惯性坐标系再转到理想位置弹体坐标系的结果。按连续转动四元数运算法则,$\boldsymbol{R}$ 可用 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{Q}^*$ 的乘积表示,即

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G} * \boldsymbol{Q}^* = (g_0 + \boldsymbol{i}_1 g_1 + \boldsymbol{i}_2 g_2 + \boldsymbol{i}_3 g_3) * (q_0 - \boldsymbol{i}_1 q_1 - \boldsymbol{i}_2 q_2 - \boldsymbol{i}_3 q_3)$$

展开上式,经整理后得四元数 $\boldsymbol{R}$ 各元数

$$\begin{cases} r_0 = q_0 g_0 + q_1 g_1 + q_2 g_2 + q_3 g_3 \\ r_1 = -q_1 g_0 + q_0 g_1 + q_2 g_3 - q_3 g_2 \\ r_2 = -q_2 g_0 + q_0 g_2 + q_3 g_1 - q_1 g_3 \\ r_3 = -q_3 g_0 + q_0 g_3 + q_1 g_2 - q_2 g_1 \end{cases} \tag{44}$$

对比(43)与(44)两式,便得沿惯性坐标系各轴上的误差信号表达式

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 2(-q_1 g_0 + q_0 g_1 + q_2 g_3 - q_3 g_2) \\ \varepsilon_y = 2(-q_2 g_0 + q_0 g_2 + q_3 g_1 - q_1 g_3) \\ \varepsilon_z = 2(-q_3 g_0 + q_0 g_3 + q_1 g_2 - q_2 g_1) \end{cases} \tag{45}$$

对于一般的飞行程序,导弹只有绕 z_1 轴的转动,其飞行程序角为 φ_{cx},则四元数 $\boldsymbol{G}$ 简化为

$$\boldsymbol{G} = \cos\frac{\varphi_{cx}}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi_{cx}}{2} = g_0 + \boldsymbol{i}_3 g_3$$

将上式代入(45)式,则得

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -2\left(q_1\cos\dfrac{\varphi_{cx}}{2} - q_2\sin\dfrac{\varphi_{cx}}{2}\right) \\ \varepsilon_y = -2\left(q_2\cos\dfrac{\varphi_{cx}}{2} + q_1\sin\dfrac{\varphi_{cx}}{2}\right) \\ \varepsilon_z = -2\left(q_3\cos\dfrac{\varphi_{cx}}{2} - q_0\sin\dfrac{\varphi_{cx}}{2}\right) \end{cases} \tag{46}$$

(46) 式表明，只要在惯系坐标系三轴上施加 ε_x，ε_y，ε_z 信号，便能控制导弹程序转弯。但由于控制信号只能施加在弹体系各轴上，因此必须将 ε_x，ε_y，ε_z 转换到弹体坐标系各轴上。根据(25) 式，则得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{z1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{47}$$

式中，ε_{x1}，ε_{y1}，ε_{z1} 为相对弹体坐标系各轴的姿态控制误差信号。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

附录 2　北东坐标系

1　北东坐标系的定义[n](mnre 或 $mx_ny_nz_n$)

北东坐标系的定义如下：取空间任一点 m 为坐标原点；选过 m 点的地心矢径 $\boldsymbol{r}$ 为 $r(y_n)$ 轴；$n(x_n)$ 轴位于过 m 点的子午面内，垂直于 $r(y_n)$ 轴，且指向北方；$e(z_n)$ 轴与 $n(x_n)$、$r(y_n)$ 轴构成右手直角坐标系(图 1)。

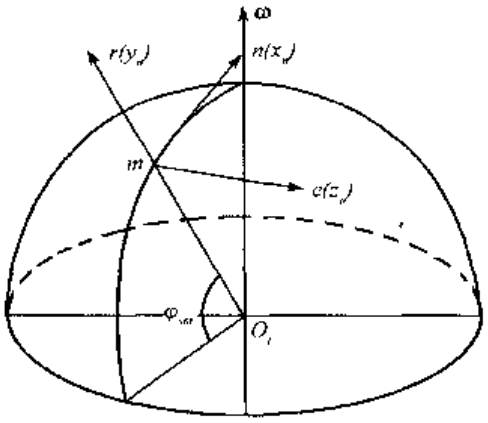


图 1

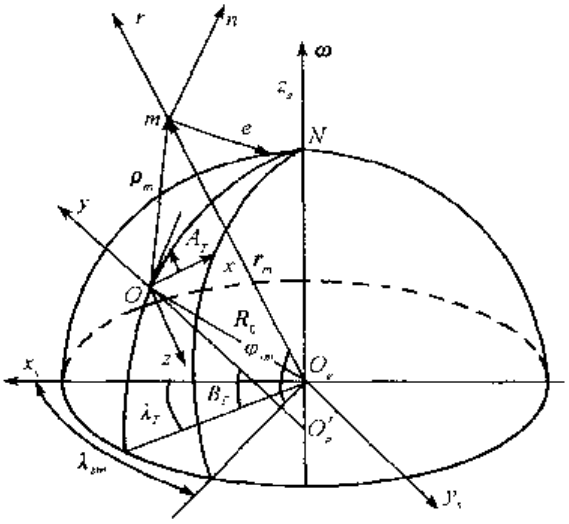


图 2

2　北东坐标系与发射坐标系间的关系

根据不同的已知条件，可用不同的方法导出发射坐标系与北东坐标系间的不同形式的坐标变换关系式。

2.1　第一种方法

这种方法是指常用的所谓坐标转换方法。即先应用坐标转换方法建立地心大地直角坐标系与北东坐标系间的坐标关系，然后再借助于在第二章中已讨论过的发射坐标系与地心大地直角坐标系间的坐标关系，建立发射坐标系与北东坐标系间的坐标变换关系式。

将平移于地心的辅助北东坐标系 o_enre，绕不同的坐标轴旋转，使其各轴与地心大地直角坐标系相应轴重合，即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$O_e nre \xrightarrow{(e\text{逆}\varphi_{sm})} O_e n'r'e' \xrightarrow{(n'\text{逆}\frac{\pi}{2}-\lambda_{sm})} O_e n''r''e'' \xrightarrow{(r''\text{逆}\frac{\pi}{2})} O_e x_s y_s z_s$$

便得地心大地直角坐标系与北东坐标系间的转换矩阵式

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_{sm}\cos\lambda_{sm} & \cos\varphi_{sm}\cos\lambda_{sm} & -\sin\lambda_{sm} \\ -\sin\varphi_{sm}\sin\lambda_{sm} & \cos\varphi_{sm}\sin\lambda_{sm} & \cos\lambda_{sm} \\ \cos\varphi_{sm} & \sin\varphi_{sm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ r \\ e \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中，φ_{sm}、λ_{sm} 分别为 m 点的地心纬度和地心经度。

由(2－2.14)式给出的发射坐标系与地心大地直角坐标系间的坐标关系矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_g^s \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_g^s = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{D}_g^s$ 矩阵各元素为

$$\begin{cases} d_{11} = -\sin\lambda_T\sin A_T - \sin B_T\cos A_T\cos\lambda_T \\ d_{12} = \cos\lambda_T\cos B_T \\ d_{13} = -\sin\lambda_T\cos A_T + \cos\lambda_T\sin B_T\sin A_T \\ d_{21} = \sin A_T\cos\lambda_T - \sin\lambda_T\sin B_T\cos A_T \\ d_{22} = \sin\lambda_T\cos B_T \\ d_{23} = \cos\lambda_T\cos A_T + \sin\lambda_T\sin B_T\sin A_T \\ d_{31} = \cos B_T\cos A_T \\ d_{32} = \sin B_T \\ d_{33} = -\sin A_T\cos B_T \end{cases} \tag{4}$$

λ_T、B_T、A_T 分别为发射点天文经度、天文纬度和天文瞄准方位角。

将(1)代入(2)式，且令

$$\boldsymbol{A}_g^n = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi_{sm}\cos\lambda_{sm} & \cos\varphi_{sm}\cos\lambda_{sm} & -\sin\lambda_{sm} \\ -\sin\varphi_{sm}\sin\lambda_{sm} & \cos\varphi_{sm}\sin\lambda_{sm} & \cos\lambda_{sm} \\ \cos\varphi_{sm} & \sin\varphi_{sm} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

则发射坐标系与北东坐标系间的坐标变换矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_g^n \begin{bmatrix} n \\ r \\ e \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.2 第二种方法

这种方法是应用过 m 点的矢量 $\boldsymbol{Q}$ 在发射坐标系和北东坐标系各轴上的投影关系来

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

建立它们间的坐标变换矩阵式的。

设空间 m 点的地心矢径和相对发射点的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_m$ 及 $\boldsymbol{\rho}_m$，发射点地心矢径为 $\boldsymbol{R}_0$(图 2)，则它们间的矢量关系式为

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{\rho}_m$$

在发射坐标系内的投影表达式为

$$r_{im} = R_{0i} + i_m \qquad (i = x, y, z)$$

单位值

$$\begin{cases} r_{im}^0 = \dfrac{r_{im}}{r_m} = \dfrac{R_{0i} + i_m}{r_m} \\ r_m^0 = (r_{xm}^{0^2} + r_{ym}^{0^2} + r_{zm}^{0^2})^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{7}$$

式中，r_{im}、R_{0i}、i_m 分别为 $\boldsymbol{r}_m$、$\boldsymbol{R}_0$ 及 $\boldsymbol{\rho}_m$ 在发射坐标系各轴上的投影；r_m^0、r_{im}^0 分别为单位矢量 $\boldsymbol{r}_m^0$ 的模及其在发射坐标系各轴上的投影。

若过 m 点的任一空间矢量 $\boldsymbol{Q}$ 在发射坐标系各轴上的分量为 x、y、z，根据矢量的点积性质有

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_m^0 = x r_{xm}^0 + y r_{ym}^0 + z r_{zm}^0$$

由于 y_n 轴与 $\boldsymbol{r}_m$($\boldsymbol{r}_m^0$)矢径重合，且方向一致，因此 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{r}_m^0$ 方向上投影也即等于在北东坐标系 y_n 轴上的投影，即

$$y_n = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_m^0$$

故

$$y_n = x r_{xm}^0 + y r_{ym}^0 + z r_{zm}^0$$

由图 2 - 3 可知

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\omega}^0 = x_n \cos\varphi_{sm} + y_n \sin\varphi_{sm} \tag{8}$$

而

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\omega}^0 = \omega^0 x + \omega^0 y + \omega^0 z$$

所以

$$x_n = (\omega_x^0 x + \omega_y^0 y + \omega_z^0 z - y_n \sin\varphi_{sm}) / \cos\varphi_{sm} \tag{9}$$

其中，x_n 为 $\boldsymbol{Q}$ 在北东坐标系 x_n 轴上的投影；ω_i^0($i = x, y, z$)为地球自转角速度单位矢量 $\boldsymbol{\omega}^0$ 在发射坐标系各轴上的投影，即

$$\begin{cases} \omega_x^0 = \dfrac{\omega_x}{\omega} = \cos B_T \cos A_T \\ \omega_y^0 = \dfrac{\omega_y}{\omega} = \sin B_T \\ \omega_z^0 = \dfrac{\omega_z}{\omega} = -\cos B_T \sin A_T \end{cases} \tag{10}$$

将 y_n 式代入(9)式，则 $\boldsymbol{Q}$ 在北东坐标系轴上的投影为

$$x_n = (f_{11} x + f_{12} y + f_{13} z) / \cos\varphi_{sm} \tag{11}$$

式中

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x^0 \\ \omega_y^0 \\ \omega_z^0 \end{bmatrix} - \sin\varphi_{sm} \begin{bmatrix} r_{xm}^0 \\ r_{ym}^0 \\ r_{zm}^0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

当记

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_m^0$$

$$A = | \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_m^0 | = \cos\varphi_{sm}$$

时,则有

$$\boldsymbol{A}^0 = \frac{\boldsymbol{A}}{A} = (\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_m^0)/\cos\varphi_{sm} \tag{13}$$

由图 3 可知,因为 $\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{A})$ 与 z_n 轴重合,所以 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{A}^0$ 方向上的投影也即为在 z_n 轴上的投影。

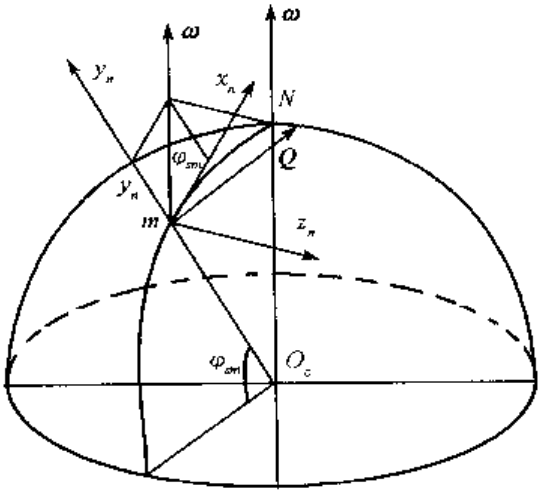


图 3

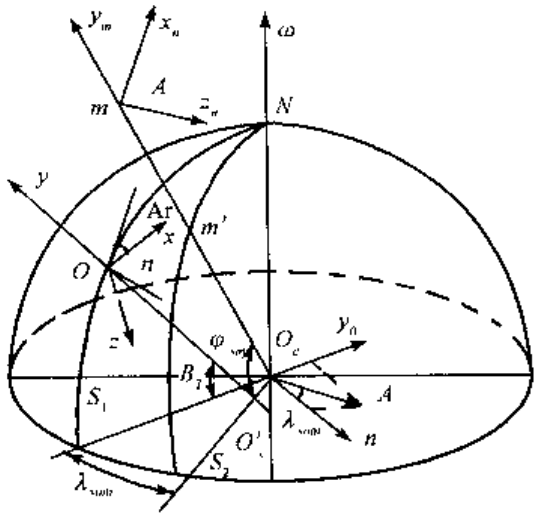


图 4

由于

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_m^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x^0 & \omega_y^0 & \omega_z^0 \\ r_{xm}^0 & r_{ym}^0 & r_{zm}^0 \end{bmatrix} = f_{31}\boldsymbol{i} + f_{32}\boldsymbol{j} + f_{33}\boldsymbol{k} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y^0 r_{zm}^0 - \omega_z^0 r_{ym}^0 \\ \omega_z^0 r_{xm}^0 - \omega_x^0 r_{zm}^0 \\ \omega_z^0 r_{ym}^0 - \omega_y^0 r_{xm}^0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

故

$$\begin{aligned} z_n &= \boldsymbol{A}^0 \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{(\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_m^0) \cdot \boldsymbol{Q}}{\cos\varphi_{sm}} \\ &= (f_{31}x + f_{32}y + f_{33}z)/\cos\varphi_{sm} \end{aligned} \tag{16}$$

综合(8)、(9)和(16)式,即得北东坐标系与发射坐标系间的坐标变换矩阵式

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{N} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{17}$$

式中

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} f_{11}/\cos\varphi_{sm} & f_{12}/\cos\varphi_{sm} & f_{13}/\cos\varphi_{sm} \\ r^0_{xm} & r^0_{ym} & r^0_{zm} \\ f_{31}/\cos\varphi_{sm} & f_{32}/\cos\varphi_{sm} & f_{33}/\cos\varphi_{sm} \end{bmatrix} \tag{18}$$

由图 4 可知

$$\boldsymbol{r}^0_m \cdot \boldsymbol{\omega}^0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{sm}\right) = \sin\varphi_{sm}$$

而

$$\boldsymbol{r}^0_m \cdot \boldsymbol{\omega}^0 = r^0_{xm}\omega^0_x + r^0_{ym}\omega^0_y + r^0_{zm}\omega^0_z$$

所以 m 点的地心纬度为

$$\varphi_{sm} = \sin^{-1}(r^0_{xm}\omega^0_x + r^0_{ym}\omega^0_y + r^0_{zm}\omega^0_z) \tag{19}$$

在图 4 中，NOS_1 为发射点 O 对应的子午面，其法线为 $\boldsymbol{n}$，而 NmS_2 为 m 点对应的子午面，两子午面间的经度差为 $\lambda_{som} = \lambda_{sm} - \lambda_{so}$。因 $\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{A})$ 与 z_n 重合，且垂直于子午面 NmS_2，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角为 λ_{som}。将 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 平移于地心（两者同位于赤道平面内），那么 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向和垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的 $\boldsymbol{Y}_0$。因与重合，且垂直于子午面，所以与间的夹角为

$$n = A\cos\lambda_{som} = \cos\varphi_{sm}\cos\lambda_{som}$$

$$y_0 = A\lambda_{som} = \cos\varphi_{sm}\sin\lambda_{som}$$

将 $\boldsymbol{Y}_0$ 在方向的分量再投影于 y_n 轴上，则有

$$y_n = -y_0\cos B_T$$

故

$$y_n = -\cos\varphi_{sm}\sin\lambda_{som}\cos B_T \tag{20}$$

由(14)式可知

$$y_n = f_{32}$$

于是

$$\sin\lambda_{som} = -\frac{f_{32}}{\cos\varphi_{sm}\cos B_T} \tag{21}$$

由图 4 可知，$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影

$$n = \cos\varphi_{sm}\sin\lambda_{som}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 在发射坐标系 x 和 z 轴上的分量 $f_{31}\boldsymbol{i}$ 及 $f_{33}\boldsymbol{k}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影代数和为

$$n = f_{31}\sin A_T + f_{33}\cos A_T$$

因两者相等，所以

$$\cos\varphi_{sm}\cos\lambda_{som} = f_{31}\sin A_T + f_{33}\cos A_T$$

即

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\cos\lambda_{sm} = \frac{f_{31}\sin A_T + f_{33}\cos A_T}{\cos\varphi_{sm}} \tag{22}$$

由(18)、(19)和(21)式看出，N矩阵元素、地心纬度φ_{sm}和地心经度差λ_{sm}均是发射点天文(大地)纬度$B_T(B_0)$、天文(大地)瞄准方位角$A_T(A_0)$以及m点地心矢量相对发射坐标系之坐标参数的函数。因此在已知这些参数的情况下，应用上述表达式即可方便地确定出φ_{sm}和λ_{sm}以及N矩阵各元素值。

如果欲求主动段关机点速度V_k在关机点北东坐标系各轴上的分量，那么可应用下式求得：

$$\begin{bmatrix} V_{xnk} \\ V_{ynk} \\ V_{znk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}/\cos\varphi_{sm} & f_{12}/\cos\varphi_{sm} & f_{13}/\cos\varphi_{sm} \\ r^0_{xm} & r^0_{ym} & r^0_{zm} \\ f_{31}/\cos\varphi_{sm} & f_{32}/\cos\varphi_{sm} & f_{33}/\cos\varphi_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xk} \\ V_{yk} \\ V_{zk} \end{bmatrix} \tag{23}$$

其中

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^0_x \\ \omega^0_y \\ \omega^0_z \end{bmatrix} - \sin\varphi_{sm} \begin{bmatrix} r^0_{xk} \\ r^0_{yk} \\ r^0_{zk} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^0_y r^0_{zm} - \omega^0_z r^0_{ym} \\ \omega^0_z r^0_{xm} - \omega^0_x r^0_{zm} \\ \omega^0_x r^0_{ym} - \omega^0_y r^0_{xm} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r^0_{xk} \\ r^0_{yk} \\ r^0_{zk} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_k} \begin{bmatrix} r_{xk} \\ r_{yk} \\ r_{zk} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_{xk} \\ r_{yk} \\ r_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0x} + x_k \\ R_{0y} + y_k \\ R_{0z} + z_k \end{bmatrix} \\ r_k = (r^2_{xk} + r^2_{yk} + r^2_{zk})^{\frac{1}{2}} \\ \begin{bmatrix} \omega^0_x \\ \omega^0_y \\ \omega^0_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos B_0 \cos A_0 \\ \sin B_0 \\ -\cos B_0 \sin A_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} \end{bmatrix} = R_0 \begin{bmatrix} -\sin\mu_0 \cos A_0 \\ \cos\mu_0 \\ \sin\mu_0 \sin A_0 \end{bmatrix} \\ \varphi_{sm} = \sin^{-1}(r^0_{xm}\omega^0_x + r^0_{ym}\omega^0_y + r^0_{zk}\omega^0_z) \\ \mu_0 = B_0 - \varphi_{so} \end{cases} \tag{24}$$

B_0、φ_{so}、A_0分别为发射点大地纬度、地心纬度和大地瞄准方位角；R_0为发射点地心距离；

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

x_k、y_k、z_k 及 V_{xk}、V_{yk}、V_{zk} 分别为主动段关机点位置和速度在发射坐标系各轴上的分量；V_{xnk}、V_{ynk}、V_{znk} 为关机点速度 V_k 相对北东坐标系各轴方向上的分量。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

附录 3　标准大气(1976 美国)
(几何高度)

1　海平面大气参数值

运动学温度　T_0 = 288.15 开氏度(K);
标度温度　T_{M0} = 288.15 开氏度(K);
摄氏温度　t_0 = 15 摄氏度(℃);
平均分子量　M_0 = 28.9644 千克 / 千克分子(kg/kmol);
压　　强　p_0 = 1.01325×10^5 牛顿 / 米^2(N/m^2)
　　= 1.01325×10^3 毫巴(mb)
　　= 1.01325×10^4 千克力 / 米^2(kgf/m^2);
密　　度　ρ_0 = 1.2250 千克 / 米^3(kg/m^3);
音　　速　a_0 = 340.294 米 / 秒(m/s);
重力加速度　g_0 = 8.80665 米 / 秒^2(m/s^2);

2　计算公式

2.1　第一种计算公式

(1) 理想气体状态方程

$$p = \frac{\rho R^* T}{M}$$

式中,p、ρ、T 分别为随高度 H 而变化的压强、密度和温度;
M 为随高度而变化的平均分子量;
R^* = 8.31432×10^3 牛顿·米 / 千克分子·开(N·m/kmol·K)。

(2) 几何高度 H 与位势高度 Z 的关系

$$H = \frac{r_0 Z}{r_0 - Z} \quad 或 \quad Z = \frac{r_0 H}{r_0 + H}$$

式中,r_0 = 6356766 米(m)。

(3) 运动学温度 T 与标度温度 T_M 关系式

$$T = \frac{M}{M_0} T_M \quad 或 \quad T_M = \frac{M_0}{M} T$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

式中，$H = 0 \sim 80\text{km}$ 时，$M = M_0 = 28.9644\text{kg/kmol}$；

$80\text{km} < H < 86\text{km}$ 时，M 按表 1 查取。

(4) 标度温度 T_M 与位势高度 Z 关系式

$$T_M = T_{Mb} + L_{Mb}(Z - Z_b)$$

式中，T_{Mb}、L_{Mb}、Z_b 值与高度有关，按表 2 选取。

表 1 分子量 M 随高度 H 的变化($H = 0 \sim 80\text{km}$)

H (m)	Z (m)	M/M_0	M (kg/kmol)	H (m)	Z (m)	M/M_0	M (kg/kmol)
8000	79005.7	1.000000	28.9644	83500	82417.3	0.999829	28.9594
80500	79493.3	0.999996	28.9643	84000	82904.4	0.999786	28.9582
81000	79980.8	0.999989	28.9641	84500	83391.4	0.999741	28.9569
81500	80468.2	0.999971	28.9636	85000	83878.4	0.999694	28.9555
82000	80955.7	0.999941	28.9627	85500	84365.2	0.999641	28.9540
82500	81443.0	0.999909	28.9618	86000	84952.0	0.999579	28.9522
83000	81930.2	0.999870	28.9606				

表 2 温度梯度 L_{Mb} 随高度 Z 的变化

分层脚注 b	高度 Z(m)	高度 H(m)	温度梯度 L_{Mb}(K/km)	各层起始标度温度 T_{Mb}(K)	各层起始大气压强 p_b(mb)	标度温度与位势高度函数式
0	0	0	-6.5	288.150	1.01325×10^3	线性函数 $T_M = T_{Mb} + L_{Mb}(Z - Z_b)$ 注：温度梯度 $L_{Mb} = -6.5\text{K/km}$ 可适用于高度 $H = 0 \sim -5\text{km}$ 的范围
1	11	11.019	0.0	216.650	2.2632×10^2	
2	20	20.063	1.0	216.650	5.4748×10^0	
3	32	32.162	2.8	228.650	8.6801×10^0	
4	47	47.350	0.0	270.650	1.1090×10^0	
5	51	51.413	-2.8	270.650	6.6938×10^{-1}	
6	71	71.802	-2.0	214.650	3.9564×10^{-2}	
7	84.852	86.000		186.950	3.7338×10^{-3}	

(5) 压强 p 与位势高度 Z 关系式

(ⅰ) $L_{Mb} \neq 0$ 情况

$$p = p_b\left[\frac{T_{Mb}}{T_{Mb} + L_{Mb}(Z - Z_b)}\right]^{(g_0 M_0/R^* L_{Mb})}$$

(ⅱ) $L_{Mb} = 0$ 情况

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$p = p_b \exp\left[\frac{-g_0 M_0}{R^* T_{Mb}}(Z - Z_b)\right]$$

式中，自然对数底 e = 2.718281828 ≈ 2.7183；

(6) 密度 ρ 与压强 p 和温度 T 关系式

$$\rho = \frac{pM}{R^* T} = \frac{pM_0}{R^* T_M}$$

(7) 音速 a 与温度 T 关系式

$$a = \left(\frac{KR^*}{M} T\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{KR^* T_M}{M_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

式中，绝热指数 $K = 1.40$；

(8) 重力加速度 g 与高度 H 关系式

$$g = g_0\left(\frac{r_0}{r_0 + H}\right)^2$$

2.2 第二种计算公式

(1) $0 \leqslant H \leqslant 11.0191$km

$$W = 1 - \frac{Z}{44.3308}$$

$$T = 288.15W(K°)$$

$$\frac{p}{p_0} = W^{5.2559}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = W^{4.2559}$$

式中，W 为中间参数，在各段表示不同的简单函数。

(2) $11.0191 < H \leqslant 20.0631$km

$$W = \exp\left(\frac{14.9647 - Z}{6.3416}\right)$$

$$T = 216.650(K°)$$

$$\frac{p}{p_0} = 1.1953 \times 10^{-1} W$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1.5898 \times 10^{-1} W$$

(3) $20.0631 < H \leqslant 32.1619$km

$$W = 1 + \left(\frac{Z - 24.9021}{221.552}\right)$$

$$T = 221.552W(K°)$$

$$\frac{p}{p_0} = 2.5158 \times 10^{-2} W^{-34.1629}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 3.2722 \times 10^{-2} W^{-35.1629}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

(4)$32.1619 < H \leqslant 47.3501$km

$$W = 1 + \left(\frac{Z - 39.7499}{89.4107}\right)$$

$$T = 250.350W(K^\circ)$$

$$\frac{p}{p_0} = 2.8338 \times 10^{-3} W^{-12.2011}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 3.2618 \times 10^{-3} W^{-13.2011}$$

(5)$47.3501 < H \leqslant 51.4125$km

$$W = \exp\left(\frac{48.6252 - Z}{7.9223}\right)$$

$$T = 270.650(K^\circ)$$

$$\frac{p}{p_0} = 8.9155 \times 10^{-4} W$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 9.4920 \times 10^{-4} W$$

(6)$51.4125 < H \leqslant 71.8020$km

$$W = 1 - \left(\frac{Z - 59.4390}{88.2218}\right)$$

$$T = 247.021W(K^\circ)$$

$$\frac{p}{p_0} = 2.1671 \times 10^{-4} W^{12.2011}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 2.5280 \times 10^{-4} W^{11.2011}$$

(7)$71.8020 < H \leqslant 86.0000$km

$$W = 1 - \left(\frac{Z - 78.0303}{100.2950}\right)$$

$$T = 200.590W(K^\circ)$$

$$\frac{p}{p_0} = 1.2274 \times 10^{-5} W^{17.0816}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1.7632 \times 10^{-5} W^{16.0816}$$

(8)$86.0000 < H \leqslant 91.0000$km

$$W = \exp\left(\frac{87.2848 - Z}{5.4700}\right)$$

$$T = 186.8700(K^\circ)$$

$$\frac{p}{p_0} = (2.2730 + 1.042 \times 10^{-3} Z) \times 10^{-6} W$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 3.6411 \times 10^{-6} W$$

0 ~ 91km 范围内的音速和重力加速度计算公式为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$a = 20.0468\sqrt{T(K^\circ)} \quad (m/s)$$

$$g = \frac{9.80665}{\left(1+\frac{H}{r_0}\right)^2}(m/s^2)$$

2.3 第三种计算公式及子程序

(1) 计算公式

a. 运动学温度比与位势高度的关系式

$$\frac{T}{T_0} = T'(a+bZ)^{\zeta}$$

b. 大气压强比与位势高度的关系式

第二、五层

$$\frac{p}{p_0} = p'\exp(a+bZ)^{\xi}$$

第一、三、四、六、七层

$$\frac{p}{p_0} = p'(a+bZ)^{\xi}$$

第八层

$$\frac{p}{p_0} = (2.2730 + 1.042\times10^{-2}Z)\exp(a+bZ)^{\xi}$$

c. 大气密度比与位势高度的关系式

第二、五、八层

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \rho'\exp(a+bZ)^{\eta}$$

第一、三、四、六、七层

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \rho'(a+bZ)^{\eta}$$

d. 大气音速比与位势高度的关系式

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = [T'(a+bZ)^{\zeta}]^{\frac{1}{2}}$$

以上各式中的参数 T', P', ρ', a, b, ζ, ξ, η 之值如表 3 所示。

(2) 计算子程序

a. 计算功能

计算任意高度 H 时的大气运动学温度比$\frac{T}{T_0}$、大气压强比$\frac{p}{p_0}$、大气密度比$\frac{\rho}{\rho_0}$ 和大气音速比$\frac{a}{a_0}$。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

表 3 美国标准大气简化数学模型常数表

层号	几何高度 H(km)	a	b	大气压强		大气密度		运动学温度	
				p'	ξ	ρ'	η	T'	ζ
1	0 ~ 11.0191	1.0000	-2.25577×10^{-2}	1.0000	5.2559	1.0000	4.2559	1.0000	1.0000
2	11.0191 ~ 20.0631	1.734573	-1.576889×10^{-1}	2.2336×10^{-1}	1.0000	2.970746×10^{-1}	1.0000	0.751865	0
3	20.0631 ~ 32.1619	0.907685	4.615739×10^{-3}	5.4032×10^{-2}	-34.1632	7.186396×10^{-2}	-35.1632	0.751865	1.0000
4	32.1619 ~ 47.3501	0.608135	1.224597×10^{-2}	8.5666×10^{-3}	-12.2011	1.079583×10^{-2}	-13.2011	0.793510	1.0000
5	47.3501 ~ 51.4125	5.932646	-1.262265×10^{-1}	1.0645×10^{-3}	1.0000	1.165269×10^{-3}	1.0000	0.939268	0
6	51.4125 ~ 71.8020	1.527619	-1.034546×10^{-2}	6.6063×10^{-4}	12.2011	7.033456×10^{-4}	11.2011	0.939268	1.0000
7	71.8020 ~ 86.000	1.661542	-9.317493×10^{-3}	3.9046×10^{-5}	17.0861	5.241602×10^{-5}	16.0016	0.744925	1.0000
8	86.000 ~ 91.000	15.95700	-1.828154×10^{-1}		1.0000	3.6411×10^{-6}	1.0000	0.648516	0

b. 子程序语句说明

SUBROUTINE US76(H,P)

其中哑元说明：

H—实型变量，输入参数，几何高度，以“米”为单位。

p—实型一维数组，长度为 3，输出参数，$i=1,2,3$ 时分别存放 H 高度对应的大气压强比，大气密度比和大气音速比。

c. 计算子程序

```
      SUBROUTINE US76(H,P)
      DIMENSION PP(3),P(3),PI(8,9)
      PARAMETER(R0=6356.766)
      I=1
      HH=H/1000.0
      Z=HH/(1.0+HH/R0)
20    IF(HH.LE.PI(I,1)) GOTO 40
      I=I+1
      GOTO 20
40    AA=PI(I,2)+PI(I,3)*Z
```

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

```
      IF(I·EQ·2·OR·I·EQ·5·OR·I·EQ·8) THEN
      PP(1) = AA
      PP(2) = AA
      ELSE
      PP(1) = AA * * PI(I,5)
      PP(2) = AA * * PI(I,7)
      END  IF
      PP(3) = ABS(AA) * * PI(I,9)
      GOTO(50,60,50,50,60,50,50,70),I
50    P(1) = PI(I,4) * PP(1)
      P(2) = PI(I,6) * PP(2)
      GOTO 90
60    P(1) = PI(I,4) * EXP(PP(1))
      GOTO 80
70    P(1) = (2·2730 + 1·042E - 3 * Z) * 1·E - 6 * EXP(PP(1))
80    P(2) = PI(I,6) * EXP(PP(2))
90    P(3) = SQRT(PI(I,8) * PP(3))
      DATA PI/11·0191,20·0631,32·1619,47·3501,
     1  51·4125,71·8020,86·00,91·000,
     1  1·0000,1·734573,0·907685,0·608135,5·932646,
     1  1·527619,1·661542,15·95700,
     1  - 2·25577E - 2, - 1·576889E - 1,4.615739E - 3,
     1  1·224597E - 2, - 1·262265E - 1, - 1·034546E - 2,
     1  - 9·317493E - 3, - 1·828154E - 1,
     1  1·0000,2·2336E - 1,5·4032E - 2,8·5666E - 3,
     1  1·0945E - 3,6·6063E - 4,3·9046E - 5,0·00,
     1  5·2559,1·0, - 34·1632, - 12·2011,1·0,12·2011
     1  17·0816,1·,
     1  1·000,2·970746E - 1,7·186396E - 2,1·079583E - 2,
     1  1·165269E - 3,7·033456E - 4,5·241602E - 5,3·6411E - 6,
     1  4·2559,1·0, - 35·1632, - 13·2011,1·0,11·2011,
     1  16·0816,1·0,
     1  1·000,·751865,·751865,·793510,
     1  ·939268,·939268,·744925,·648516,
     1  1·0,0·0,1·0,1·0,0·0,1·0,1·0,0·0/
      END
```

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

3 标准大气主要参数

表 4 标准大气(1976 美国)主要参数表

几何高度 H (km)	位势高度 Z (km)	标度温度 T_M(K)	开氏温度 T(K)	摄氏温度 t(℃)	相对压强 p/p_0	相对密度 ρ/ρ_0	音速 a(m/s)	重力加速度 (m/s^2)	平均分子量 (kg/kmol)
0	0	288.150	288.150	15.000	1.00000	1.00000	340.294	9.80665	28.9644
1	1	281.651	281.651	8.501	8.8700 – 1	9.0748 – 1	336.43	9.8036	28.9644
2	1.999	275.154	275.154	2.004	7.8461	8.2168	332.53	9.8005	28.9644
3	2.999	268.659	268.659	– 4.491	6.9204	7.4225	328.58	9.7974	28.9644
4	3.997	262.166	262.166	– 10.984	6.0854	6.6885	324.59	9.7943	28.9644
5	4.996	255.676	255.676	– 17.474	5.3341	6.0117	320.55	9.7912	28.9644
6	5.994	249.187	249.187	– 23.963	4.6600 – 1	5.3887 – 1	316.45	9.7882	28.9644
7	6.992	242.700	242.700	– 30.450	4.0567	4.8165	312.31	9.7851	28.9644
8	7.990	236.215	236.215	– 36.935	3.5185	4.2921	308.11	9.7820	28.9644
9	8.987	229.733	229.733	– 43.417	3.0397	3.8128	303.85	9.7789	28.9644
10	9.984	223.252	223.252	– 49.898	2.6153	3.3756	299.53	9.7759	28.9644
12	11.977	216.650	216.650	– 56.500	1.9145 – 1	2.5464 – 1	295.07	9.7697	28.9644
14	13.969	216.650	216.650	– 56.500	1.3985	1.8601	295.07	9.7636	28.9644
16	15.960	216.650	216.650	– 56.500	1.0217	1.3589	295.07	9.7575	28.9644
18	17.949	216.650	216.650	– 56.500	7.4663 – 2	9.9304 – 2	295.07	9.7513	28.9644
20	19.937	216.650	216.650	– 56.500	5.4570	7.2580	295.07	9.7452	28.9644
22	21.924	218.574	218.574	– 54.576	3.9945 – 2	5.2661 – 2	296.38	9.7391	28.9644
24	23.910	220.560	220.560	– 52.590	2.9328	3.8317	297.72	9.7330	28.9644
26	25.894	222.544	222.544	– 50.606	2.1597	2.7965	299.06	9.7269	28.9644
28	27.877	224.527	224.527	– 48.623	1.5950	2.0470	300.39	9.7208	28.9644
30	29.859	226.509	226.509	– 46.641	1.1813	1.5029	301.71	9.7147	28.9644
32	31.840	228.490	228.490	– 44.660	8.7743 – 3	1.1065 – 2	303.02	9.7087	28.9644
34	33.819	233.743	233.743	– 39.407	6.5473	8.0714 – 3	306.49	9.7026	28.9644
36	35.797	239.282	239.282	– 33.868	4.9200	5.9248	310.10	9.6965	28.9644
38	37.774	244.818	244.818	– 28.332	3.7220	4.3809	313.67	9.6904	28.9644
40	39.750	250.350	250.350	– 22.800	2.8338	3.2618	317.19	9.6844	28.9644

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

表 4 标准大气(1976 美国)主要参数表

几何高度 H (km)	位势高度 Z (km)	标度温度 T_M(K)	开氏温度 T(K)	摄氏温度 t(℃)	相对压强 p/p_0	相对密度 ρ/ρ_0	音速 a(m/s)	重力加速度 (m/s^2)	平均分子量 (kg/kmol)
42	41.724	255.878	255.878	-17.272	2.1709-3	2.4447-3	320.67	9.6783	28.9644
44	43.698	261.403	261.403	-11.747	1.6728	1.8440	324.12	9.6723	28.9644
46	45.669	266.925	266.925	-6.2225	1.2962	1.3993	327.52	9.6662	28.9644
48	47.640	270.650	270.650	-2.500	1.0095	1.0749	329.80	9.6602	28.9644
50	49.610	270.650	270.650	-2.500	7.8735-4	8.3827-4	329.80	9.6542	28.9644
52	51.578	269.031	269.031	-4.119	6.1401-4	6.5765-4	328.81	9.6482	28.9644
54	53.545	263.524	263.524	-9.626	4.7705	5.2164	325.43	9.6421	28.9644
56	55.511	258.019	258.019	-15.131	3.6873	4.1180	322.01	9.6361	28.9644
58	57.476	252.518	252.518	-20.632	2.8348	3.2348	318.56	9.6301	28.9644
60	59.439	247.021	247.021	-26.129	2.1671	2.5280	315.07	9.6241	28.9644
62	61.401	241.527	241.527	-31.623	1.6470-4	1.9650-4	311.55	9.6181	28.9644
64	63.362	236.036	236.036	-37.114	1.2441	1.5188	307.99	9.6121	28.9644
66	65.322	23.549	23.549	-42.601	9.3372-5	1.1670	304.39	9.6061	28.9644
68	67.280	225.065	255.065	-48.085	6.6907	8.9118-5	300.75	9.6002	28.9644
70	69.238	219.585	219.585	-53.565	5.1526	6.7616	297.06	9.5942	28.9644
72	71.194	214.263	214.263	-58.887	3.7861-5	5.0917-5	293.44	9.5882	28.9644
74	73.148	210.353	210.353	-62.797	2.7642	3.7866	290.75	9.5823	28.9644
76	75.102	206.446	204.446	-66.704	2.0067	2.8009	288.04	9.5763	28.9644
78	77.054	202.541	202.541	-70.609	1.4481	2.0603	285.30	9.5703	28.9644
80	79.006	198.639	198.639	-74.511	1.0387	1.5868	282.54	9.5644	28.9644
82	80.965	194.739	194.739	-78.411	7.4028-6	1.0954-5	279.75	9.5585	28.9627
83	81.930	192.790	192.790	-80.360	6.2341	9.3178-6	278.35	9.5555	28.9606
84	82.904	190.841	190.841	-82.309	5.2410	7.9134	276.94	9.5525	28.9682
85	83.878	188.893	188.893	-84.257	4.3985	6.7099	275.52	9.5496	28.9555
86	84.852	186.95	186.87	-86.280	3.6850	5.680	274.09	9.5466	28.9522

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

附录 4　常微分方程组的求解算法程序

1　积分一步的定步长龙格—库塔法

1.1　功能

用定步长四阶龙格－库塔法对一阶微分方程组积分一步。

1.2　方法说明

参见 §8.2 节中的标准弹道方程组的解算方法。

1.3　子程序语句

SUBROUTINE RKT1(T,H,Y,M,F,D,B)

1.4　哑元说明

T—实型变量，输入参数。自变量的前一点值。

H—实型变量，输入参数。步长，即积分一步的下一点自变量值为 $T+H$。

Y—实型一维数组，长度为 *M*，输入兼输出参数。调用时存放 *T* 点的未知函数值 $y_i(T)(i=1,2,\cdots,M)$；返回时存入 $T+H$ 点的未知函数值 $y_i(T+H)(i=1,2,\cdots,M)$。

M—整型变量，输入参数。方程组中方程的个数，也是未知函数的个数。

F—子程序名输入参数。用于计算方程中各方程的右端函数值 $f_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_m)(i=1,2,\cdots,M)$。在主程序中必须用外部语句对相应的实元进行说明。

此子程序由用户自编，其语句形式为：

SUBROUTINE F(T,Y,M,D)

其中：*T* 为自变量值；*Y* 为实型一维数组，长度为 *M*，存放 *M* 个未知函数 $y_i(T)(i=1,2,\cdots,M)$；*D* 为实型一维数组，长度为 *M*，存放 *M* 个方程的右端函数值 $f_i(T,y_1,y_2,\cdots,y_m)(i=1,2,\cdots,M)$。

D—实型一维数组，长度为 *M*。本子程序的工作数组，用于存放 *M* 个方程的右端函数值 f_i。

B—实型一维数组，长度为 *M*。本子程序的工作数组。

1.5　子程序(文件名：RKT1.FOR)

SUBROUTINE RKT1(T,H,Y,M,F,D,B)

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

```
      DIMENSION Y(M),D(M),A(4),B(M)
      DOUBLE PRECISION Y,D,A,B,T,H,TT
      A(1) = H/2.0
      A(2) = A(1)
      A(3) = H
      A(4) = H
      CALL F(T,Y,M,D)
      DO 10 I = 1,M
10    B(I) = Y(I)
      DO 30 K = 1,3
      DO 20 I = 1,M
      Y(I) = Y(I) + A(K) * D(I)
      B(I) = B(I) + A(K + 1) * D(I)/3.0
20    CONTINUE
      TT = T + A(K)
      CALL F(TT,Y,M,D)
30    CONTINUE
      DO 40 I = 1,M
40    Y(I) = B(I) + H * D(I)/6.0
      RETURN
      END
```

1.6 附注

(1)本子程序采用双精度运算。如果用户只要求单精度运算,则只要删除子程序中第3行的双精度类型说明语句即可。

(2)当采用双精度运算时,子程序中的形参 T,H,Y,D,B 为双精度类型,在主程序中的相应实元也应说明为双精度类型。

2 变步长龙格－库塔法

2.1 功能

用变步长四阶龙格－库塔(Runge－Kutta)法对一阶微分方程组积分一步。

2.2 方法说明

本方法同§8.2节中的标准弹道方程组的解算方法。

根据四阶龙格－库塔公式以 h 为步长由 $y_{i,j-1}$ 计算 $y_{ij}^{(h)}(i=1,2,\cdots,m)$;再以 $h/2$ 为步长由 $y_{i,j-1}$ 跨两步计算 $y_{ij}^{(h/2)}(i=1,2,\cdots,m)$。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

若

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|y_{ij}^{(h/2)}-y_{ij}^{(h)}\right|<\varepsilon$$

则停止计算,取 $y_{ij}=y_{ij}^{(h/2)}(i=1,2,\cdots,m)$。否则将步长折半再进行计算。

上述过程一直做到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|y_{ij}^{(h/2^k)}-y_{ij}^{(h/2^{k-1})}\right|<\varepsilon$$

为止,最后可得

$$y_{ij}=y_{ij}^{(h/2^k)}(i=1,2,\cdots,m)$$

2.3 子程序语句

SUBROUTINE RKT3(T,H,Y,M,F,EPS,D,B,C,G)

2.4 哑元说明

T—实型变量,输入参数。自变量的前一点值。

H—实型变量,输入参数。步长,即积分一步的下一点自变量值为 $T+H$。

Y—实型一维数组,长度为 *M*,输入兼输出参数。调用时存放 *T* 点的未知函数值 $y_i(T)(i=1,2,\cdots,M)$;返回时存入 $T+H$ 点未知函数值 $y_i(T+H)(i=1,2,\cdots,M)$。

M—整型变量,输入参数。方程组中方程的个数,也是未知函数的个数。

F—子程序名,输入参数。用于计算方程组中各方程的右端函数 $f_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_m)$ $(i=1,2,\cdots,M)$。在主程序中必须用外部语句对相应的实元进行说明。此子程序由用户自编,其语句形式为

SUBROUTINE F(T,Y,M,D)

其中:*T* 为自变量值;*Y* 为实型一维数组,长度为 *M*,存放 *M* 个未知函数 $y_i(T)(i=1,2,\cdots,M)$;*D* 为实型一维数组,长度为 *M*,存放 *M* 个方程的右端函数值 $f_i(T,y_1,y_2,\cdots,y_m)$ $(i=1,2,\cdots,M)$。

EPS—实型变量,输入参数。精度要求。

D—实型一维数组,长度为 *M*。本子程序的工作数组,用于存放 *M* 个方程的右端函数值 f_i。

B、*C*、*G*—实型一维数组,长度为 *M*,本子程序的工作数组。

2.5 子程序(文件名:RKT3.FOR)

```
SUBROUTINE RKT3(T,H,Y,M,F,EPS,D,B,C,G)
DIMENSION Y(M),D(M),A(4),B(M),C(M),G(M)
DOUBLE PRECISION Y,D,A,B,C,G,T,H,X,HH
HH=H
N=1
P=1+EPS
```

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

```
      X = T
      DO 5 I = 1,M
5     C(I) = Y(I)
10    IF(P.GE.EPS) THEN
      A(1) = HH/2.0
      A(2) = A(1)
      A(3) = HH
      A(4) = HH
      DO 20 I = 1,M
      G(I) = Y(I)
      Y(I) = C(I)
20    CONTINUE
      DT = H/N
      T = X
      DO 100 J = 1,N
      CALL F(T,Y,M,D)
      DO 30 I = 1,M
30    B(I) = Y(I)
      DO 50 K = 1,3
      DO 40 I = 1,M
      Y(I) = Y(I) + A(K) * D(I)
      B(I) = B(I) + A(K + 1) * D(I)/3.0
40    CONTINUE
      TT = T + A(K)
      CALL F(TT,Y,M,D)
50    CONTINUE
      DO 60 I = 1,M
60    Y(I) = B(I) + HH * D(I)/6.0
      T = T + DT
100   CONTINUE
      P = 0.0
      DO 110 I = 1,M
      Q = ABS(Y(I) - G(I))
      IF(Q.GT.P) P = Q
110   CONTINUE
      HH = HH/2.0
      N = N + 1
      GOTO 10
```

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

```
END IF
T = X
RETURN
END
```

2.6 附注

(1)本子程序采用双精度运算。如果用户只要求单精度运算,则只要删除子程序中第3行的双精度类型说明语句即可。

(2)当采用双精度运算时,子程序中的形参 T, H, Y, D, B, C, G 为双精度类型,在主程序中的相应实元也应说明为双精度类型。

3 阿达姆茨预报—校正法

3.1 功能

用阿达姆茨预报—校正公式对一阶微分方程组进行全区间积分。

3.2 方法说明

参见§8.2节中的标准弹道方程组的解算方法。

3.3 子程序语句

```
SUBROUTINE ADAMS(T,H,N,Y,M,Z,F,D,EPS,B,E,S,G)
```

3.4 哑元说明

T—实型变量,输入参数。微分方程组的初值点,即积分的起始点。

H—实型变量,输入参数。从初始点开始,对微分方程组积分一步的步长。

N—整型变量,输入参数。从初始点开始,对微分方程组积分的步数(包括初值点这一步)。

Y—实型一维数组,长度为 M,输入参数。微分方程组的初始点处 T 的 M 个未知函数的初值。返回时其值在 $Z(i,1)(i=1,2,\cdots,M)$ 中。

M—整型变量,输入参数。方程组中方程的个数,也是未知函数的个数。

Z—实型二维数组,体积为 $M\times N$,输出参数。存放 N 个积分点(包括初值点)上的未知函数值,即

$$Z(i,j)=y_{ij},i=1,2,\cdots,M;j=1,2,\cdots N$$

其中 $Z(i,1)$ 为初值($i=1,2,\cdots,M$)。

F—子程序名,输入参数。用于计算方程组中各方程的右端函数值 $f_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_m)(i=1,2,\cdots,M)$。在主程序中必须用外部语句对相应的实元进行说明。此子程序由用户自编,其语句形式为

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

SUBROUTINE F(T,Y,M,D)

其中：T 为自变量值；Y 为实型一维数组，长度为 M，存放 M 个未知函数值 $y_i(T)$；D 为实型一维数组，长度为 M，存放 M 个方程的右端函数值 $f_i(T,y_1,y_2,\cdots,y_m)$。

D—实型一维数组，长度为 M。本子程序的工作数组，存放 M 个方程的右端函数值 f_i。

EPS—实型变量，输入参数。在调用变步长龙格－库塔法时的精度要求。

B—实型二维数组，体积为 $4\times M$。本子程序的工作数组。

E、*S*、*C*—实型一维数组，长度为 M。本子程序的工作数组。

3.5 子程序(文件名:ADAMS.FOR)

```
      SUBROUTINE ADAMS(T,H,N,Y,M,Z,F,D,EPS,B,E,S,G)
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y(M),A(M),Z(M,N),B(4,M),E(M),S(M),G(M)
      DOUBLE PRECISION Y,Z,D,B,T,H,A,Q,E,S,G
      A=T
      DO 5 I=1,M
    5 Z(I,1)=Y(I)
      CALL F(T,Y,M,D)
      DO 10 I=1,M
   10 B(1,I)=D(I)
      DO 40 I=2,4
      IF(1.LE.N) THEN
      T=A+(I-1)*H
      CALL RKT3(T,H,Y,M,F,EPS,D,E,S,G)
      DO 20 K=1,M
   20 Z(K,I)=Y(K)
      CALL F(T,Y,M,D)
      DO 30 K=1,M
   30 B(I,K)=D(K)
      END IF
   40 CONTINUE
      DO 100 I=5,N
      DO 50 J=1,M
      Q=55*B(4,J)-59*B(3,J)+37*B(2,J)-9*B(1,J)
      Y(J)=Z(J,I-1)+H*Q/24.0
      B(1,J)=B(2,J)
      B(2,J)=B(3,J)
      B(3,J)=B(4,J)
```

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

```
50  CONTINUE
    T = A + (I - 1) * H
    CALL F(T,Y,M,D)
    DO 60 K = 1,M
60  B(4,K) = D(K)
    DO 70 J = 1,M
    Q = 9 * B(4,J) + 19 * B(3,J) - 5 * B(2,J) + B(1,J)
    Z(J,I) = Z(J,I - 1) + H * Q/24.0
    Y(J) = Z(J,I)
70  CONTINUE
    CALL F(T,Y,M,D)
    DO 80 K = 1,M
80  B(4,K) = D(K)
100 CONTINUE
    T = A
    RETURN
    END
```

3.6 附注

(1)本程序采用双精度计算。如果用户只要求单精度运算,则只要删除子程序中第4行的双精度类型说明语句即可。

(2)本子程序要调用变步长四阶龙格-库塔法积分一步的子程序,即

RKT3(T,H,Y,M,F,EPS,D,E,S,G)

(3)当采用双精度运算时,子程序中的形参T,H,Y,Z,D,B,E,S,G为双精度类型,在主程序中的相应实元也应说明为双精度类型。

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

附录 5　考虑地球旋转的误差系数计算公式

$$n_{11}=\frac{\partial V}{\partial V_{xk}}=\frac{V_{xk}}{V_k}$$

$$n_{12}=\frac{\partial V}{\partial V_{yk}}=\frac{V_{yk}}{V_k}$$

$$n_{13}=\frac{\partial V}{\partial V_{zk}}=\frac{V_{zk}}{V_k}$$

$$n_{21}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial V_{xk}}=\mathrm{tg}\Theta_A\left(\frac{a_{21}}{V_{yA}}-\frac{n_{11}}{V_k}\right)$$

$$n_{22}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial V_{yk}}=\mathrm{tg}\Theta_A\left(\frac{a_{22}}{V_{yA}}-\frac{n_{12}}{V_k}\right)$$

$$n_{23}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial V_{zk}}=\mathrm{tg}\Theta_A\left(\frac{a_{23}}{V_{yA}}-\frac{n_{13}}{V_k}\right)$$

$$n_{24}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial x_k}=\frac{\mathrm{tg}\Theta_A}{V_{yA}}\left(b_{22}n_{64}+b_{21}n_{54}\right)$$

$$n_{25}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial y_k}=\frac{\mathrm{tg}\Theta_A}{V_{yA}}\left(b_{22}n_{65}+b_{21}n_{55}\right)$$

$$n_{26}=\frac{\partial \Theta_A}{\partial z_k}=\frac{\mathrm{tg}\Theta_A}{V_{yA}}\left(b_{22}n_{66}+b_{21}n_{56}\right)$$

$$n_{34}=\frac{\partial r}{\partial x_k}=\frac{x_k}{r_k}$$

$$n_{35}=\frac{\partial r}{\partial y_k}=\frac{R+y_k}{r_k}$$

$$n_{36}=\frac{\partial r}{\partial z_k}=\frac{z_k}{r_k}$$

$$n_{41}=\frac{\partial \gamma_A}{\partial V_{xk}}=-\frac{V_{xA}a_{31}-V_{zA}a_{11}}{V_{xA}^2+V_{yA}^2}$$

$$n_{42}=\frac{\partial \gamma_A}{\partial V_{yk}}=\frac{V_{xA}a_{32}-V_{zA}a_{12}}{V_{xA}^2+V_{yA}^2}$$

$$n_{43}=\frac{\partial \gamma_A}{\partial V_{zk}}=-\frac{V_{xA}a_{33}-V_{zA}a_{13}}{V_{xA}^2+V_{yA}^2}$$

$$n_{44}=\frac{\partial \gamma_A}{\partial x_k}=\frac{V_{xA}b_{23}n_{64}-V_{zA}\left(n_{64}b_{12}+n_{54}b_{11}\right)}{V_{xA}^2+V_{yA}^2}$$

$$n_{45}=\frac{\partial \gamma_A}{\partial y_k}=\frac{V_{xA}b_{23}n_{65}-V_{zA}\left(n_{65}b_{12}+n_{56}b_{11}\right)}{V_{xA}^2+V_{zA}^2}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$n_{46}=\frac{\partial\gamma_A}{\partial z_k}=\frac{V_{xA}b_{23}n_{66}-V_{zA}(n_{66}b_{12}+n_{56}b_{11})}{V_{xA}^2+V_{zA}^2}$$

$$n_{54}=-\frac{\partial\beta_p}{\partial x_k}=\operatorname{ctg}\beta_p\frac{x_k}{r_k^2}$$

$$n_{55}=\frac{\partial\beta_p}{\partial\gamma_k}=\operatorname{ctg}\beta_p\left(\frac{R+\gamma_k}{r_k^2}-\frac{1}{R+\gamma_k}\right)$$

$$n_{56}=\frac{\partial\beta_p}{\partial z_k}=\operatorname{ctg}\beta_p\frac{z_k}{r_k^2}$$

$$n_{64}=-\frac{z_k}{x_k^2+z_k^2}=\frac{\partial\gamma_p}{\partial x_k}$$

$$n_{65}=\frac{\partial\gamma_p}{\partial\gamma_k}=0$$

$$n_{66}=\frac{\partial\gamma_p}{\partial z_k}=\frac{x_k}{x_k^2+z_k^2}$$

$$a_{11}=\cos\gamma_p\cos\beta_p$$

$$a_{12}=-\sin\beta_p$$

$$a_{13}=\sin\gamma_p\cos\beta_p$$

$$a_{21}=\cos\gamma_p\sin\beta_p$$

$$a_{22}=\cos\beta_p$$

$$a_{23}=\sin\gamma_p\sin\beta_p$$

$$a_{31}=-\sin\gamma_p$$

$$a_{32}=0$$

$$a_{33}=\cos\gamma_p$$

$$b_{11}=-V_{\gamma_A}$$

$$b_{12}=-(a_{13}V_{xA}-a_{11}V_{zA})$$

$$b_{21}=V_{xA}$$

$$b_{22}=-(a_{23}V_{xA}-a_{21}V_{zA})$$

$$b_{23}=-(a_{33}V_{xA}-a_{31}V_{zA})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{sc}}=(\sin\varphi_w\cos\varphi_{so}\cos\widetilde{\lambda_{sc}}-\cos\varphi_{sc}\sin\varphi_{so})/\sin\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{\lambda_{sc}}}=\cos\varphi_{sc}\cos\varphi_{so}\sin\widetilde{\lambda_{sc}}/\sin\Phi$$

$$\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\Phi}=-\operatorname{tg}\psi_\varphi\operatorname{ctg}\Phi$$

$$\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi_{sc}}=-\operatorname{tg}\psi_\varphi\operatorname{tg}\varphi_{sc}$$

$$\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\widetilde{\lambda_{sc}}}=\operatorname{tg}\psi_\varphi\operatorname{ctg}\widetilde{\lambda_{sc}}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\partial \varphi_{sc}}{\partial \beta_c} = (\cos\varphi_{sk}\cos\beta_c\cos\psi_{\beta c} - \sin\varphi_{sk}\sin\beta_c)/\cos\varphi_{sc}$$

$$\frac{\partial \varphi_{sc}}{\partial \psi_{\beta c}} = -\cos\varphi_{sk}\sin\beta_c\sin\psi_{\beta c}/\cos\varphi_{sc}$$

$$\frac{\partial \varphi_{sc}}{\partial \varphi_{sk}} = (\cos\varphi_{sk}\cos\beta_c - \sin\varphi_{sk}\sin\beta_c\cos\psi_{\beta c})/\cos\varphi_{sc}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sc}}}{\partial \varphi_{sc}} = \mathrm{tg}\varphi_{sc}\,\mathrm{tg}[(\lambda_w - \lambda_{sk}) + \omega t_c]$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sc}}}{\partial \beta_c} = \mathrm{ctg}\beta_c\,\mathrm{tg}[(\lambda_{sc} - \lambda_{sk}) + \omega t_c]$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sc}}}{\partial \psi_{\beta c}} = \mathrm{ctg}\psi_{\beta c}\,\mathrm{tg}[(\lambda_{sc} - \lambda_{sk}) + \omega t_c]$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sc}}}{\partial \widetilde{\lambda_{sk}}} = 1$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sc}}}{\partial t_k} = -\omega$$

$$\frac{\partial \varphi_{sk}}{\partial \beta_p} = (\cos\varphi_{so}\cos\beta_p\cos\psi_{\beta p} - \sin\varphi_{so}\sin\beta_p)/\cos\varphi_{sk}$$

$$\frac{\partial \varphi_{sk}}{\partial \psi_{\beta p}} = -\cos\varphi_{so}\sin\beta_p\sin\psi_{\beta p}/\cos\varphi_{sk}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sk}}}{\partial \varphi_{sk}} = \mathrm{tg}\varphi_{sk}\,\mathrm{tg}(\widetilde{\lambda_{sk}} + \omega t_k)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sk}}}{\partial \psi_{\beta p}} = \mathrm{ctg}\psi_{\beta p}\,\mathrm{tg}(\widetilde{\lambda_{sk}} + \omega t_k)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\lambda_{sk}}}{\partial t_k} = -\omega$$

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial \varphi_{sk}} = \mathrm{tg}\varphi_{sk}\,\mathrm{tg}\psi_A$$

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial \psi_{\beta p}} = \mathrm{ctg}\psi_{\beta p}\,\mathrm{tg}\psi_A$$

$$\frac{\partial \beta_c}{\partial V_A} = \frac{4R(1+\mathrm{tg}\Theta_A)\sin^2\frac{\beta_c}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}}{V_A\nu_A[r_A - R + R\mathrm{tg}\Theta_A\,\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}]}$$

$$\frac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_A} = \frac{2R(1+\mathrm{tg}^2\Theta_A)[\nu_A - 2\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}\mathrm{tg}\Theta_A]\sin^2\frac{\beta_c}{2}}{\nu_A[r_A - R + R\mathrm{tg}\Theta_A\,\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}]}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\partial \beta_c}{\partial r_A}=\frac{\left[\nu_A+\frac{2R}{r_A}(1+\mathrm{tg}^2\Theta_A)\sin^2\frac{\beta_c}{2}\right]\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}}{\nu_A\left[r_A-R+R\mathrm{tg}\Theta_A\,\mathrm{tg}\frac{\beta_c}{2}\right]}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial V_A}=\frac{\partial t_c}{\partial \beta_c}\cdot\frac{\partial \beta_c}{\partial V_A}+\frac{\partial t_c}{\partial \beta_p}\cdot\frac{\partial \beta_p}{\partial V_A}+\frac{\partial t_c}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial V_A}+\frac{\partial t_c}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial V_A}+\frac{\partial t_c}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial V_A}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial \Theta_A}=\frac{\partial t_c}{\partial \beta_c}\cdot\frac{\partial \beta_c}{\partial \Theta_A}+\frac{\partial t_c}{\partial \beta_p}\cdot\frac{\partial \beta_p}{\partial \Theta_A}+\frac{\partial t_c}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial \Theta_A}+\frac{\partial t_c}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial \Theta_A}+\frac{\partial t_c}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \Theta_A}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial r_A}=\frac{\partial t_c}{\partial \beta_c}\cdot\frac{\partial \beta_c}{\partial r_A}+\frac{\partial t_c}{\partial \beta_p}\cdot\frac{\partial \beta_p}{\partial r_A}+\frac{\partial t_c}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial r_A}+\frac{\partial t_c}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial r_A}+\frac{\partial t_c}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial r_A}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial \beta_p}=\frac{t_c}{A}\left\{\frac{e(\cos\beta_p-e)}{(1-\cos\beta_p)^2}+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\frac{Q_\beta}{1+Q_\beta{}^2}\frac{1}{\sin\beta_p}\right\}-\frac{\partial t_c}{\partial \beta_c}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial \beta_c}=\frac{t_c}{A}\left[\frac{e(\cos\beta_1-e)}{(1-\cos\beta_1)^2}+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\frac{Q_1}{1+Q_1{}^2}\frac{1}{\sin\beta_1}\right]$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial e}=\frac{2et_c}{1-e^2}+\frac{t_c}{A}\left|\frac{\sin\beta_1}{(1-e\cos\beta_1)^2}+\frac{\sin\beta_p}{(1-e\cos\beta_p)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-e^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[e\mathrm{tg}^{-1}Q_1+e\mathrm{tg}^{-1}Q_\beta+\frac{Q_1}{1+Q_1{}^2}+\frac{Q_\beta}{1+Q_\beta{}^2}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial P}=\frac{2t_c}{P}$$

$$\frac{\partial t_c}{\partial c}=-t_c/c$$

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial \Theta_A}=\frac{2\mathrm{tg}\beta_p}{V_A(1+\mathrm{tg}^2\beta_p)(1-\nu_A\cos^2\Theta_A)}$$

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial \Theta_A}=\frac{\mathrm{tg}\beta_p c\mathrm{tg}\Theta_A(1-\nu_A\mathrm{tg}^2\Theta_A)}{(1+\mathrm{tg}^2\beta_p)(1-\nu_A\cos^2\Theta_A)}$$

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial r_A}=\frac{\mathrm{tg}\beta_p}{r_A(1+\mathrm{tg}^2\beta_p)(1-\nu_A\cos^2\Theta_A)}$$

$$\frac{\partial e}{\partial V_A}=-\frac{2(1-\nu_A)\nu_A\cos^2\Theta_A}{eV_A}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_A}=\frac{1-e^2}{e}\mathrm{tg}\Theta_A$$

$$\frac{\partial e}{\partial r_A}=-\frac{(1-\nu_A)\nu_A\cos^2\Theta_A}{er_A}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V_A}=\frac{2P}{V_A}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta_A}=-2P\mathrm{tg}\Theta_A$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_A}=\frac{2P}{r_A}$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

$$\frac{\partial c}{\partial V_A} = r_A \cos\Theta_A$$

$$\frac{\partial c}{\partial \Theta_A} = -r_A V_A \sin\Theta_A$$

$$\frac{\partial c}{\partial r_A} = V_A \cos\Theta_A$$

$$\nu_A = \frac{r_A V_A^2}{fM} = \nu_k$$

中国国防科技论坛 http://bbs.81tech.com

参 考 文 献

[1] 贾沛然,沈为异编．弹道导弹弹道学．国防科学技术大学,1980

[2] 张最良,谢可兴,林金,张谦编．弹道导弹的制导与控制．国防科学技术大学,1981

[3] 阿巴佐夫,莱夫诺夫·米什著．远程导弹弹道学．王明海译,二炮技术学院,1983

[4] 程国采编．摄动与制导．国防科学技术大学,1981

[5] 赵守智等编．弹道式导弹飞行力学．二炮技术学院,1983

[6] 王明海编．远程导弹弹道学．二炮技术学院,1978

[7] 李连仲．弹道飞行器自由飞行轨道的解析解法．宇航学报,1982,(1)

[8] W.A海斯卡涅,H.莫里斯著．物理大地测量学．卢福康,胡国理译,北京:测绘出版社,1979

[9] 方俊．重力测量与地球形状学[下册]．北京:科学出版社,1975

[10] 杨炳尉．标准大气参数的公式表示．宇航学报,1983,(1)

[11] 湘华译．运载火箭最佳尺寸的确定．国外导弹技术,1980,(12)

[12] 张毅．地地导弹弹道．第二炮兵工程学院,1986

[13] 贾沛然,陈克俊,何力编著．远程火箭弹道学．长沙:国防科技大学出版社,1993

[14] 潘锦珊主编．气体动力学基础．西安:西北工业大学出版社,1995

[15] 范景祥．空气动力学．第二炮兵工程学院,1986

[16] 张毅．两种标准大气的简化计算数模型,1990

[17] 李昕,肖龙旭．捷联惯性的数学方法．科技研究,1993

[18] 程国采．四元数法及其应用．长沙:国防科技大学出版社,1991

[19] 徐延万主编．控制系统．北京:宇航出版社,1989.3

[20] A.A.列别捷夫,H.Φ.盖拉秀塔等著．远程火箭弹道学及某些问题．国防科技大学303教研室译,国防科技大学,1978

[21] 张毅等．弹道导弹头部再入参数的解析解．国际弹道学术交流会,1989

[22] 范景祥．再入动力学．第二炮兵工程学院,1986

[23] 赵汉元．飞行器再入动力学和制导．长沙:国防科技大学出版社,1997.11

[24] 程国采．战术导弹导引方法．北京:国防工业出版社,1996.4

[25] 陆仲连．弹道导弹重力学．北京:八一出版社,1993.6